



TESIS-SM 142501

KONVEKSI PAKSA DARI ALIRAN FLUIDA MAGNETOHIRODINAMIK TAK TUNAK YANG MELALUI BOLA BERPORI

Nadya Alvi Rahma
1215 201 201

DOSEN PEMBIMBING
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si

**PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2017**



THESIS-SM 142501

FORCED CONVECTION OF UNSTEADY MAGNETOHYDRODYNAMICS FLUID PAST A POROUS SPHERE

Nadya Alvi Rahma
1215 201 201

SUPERVISOR
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si

**MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2017**

**KONVEKSI PAKSA DARI ALIRAN FLUIDA
MAGNETOHIDRODINAMIK TAK TUNAK YANG MELALUI
BOLA BERPORI**

**Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)**

**di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya**

**Oleh :
NADYA ALVI RAHMA
NRP. 1215 201 201**

**Tanggal Ujian : 17 Juli 2017
Periode Wisuda: September 2017**

Disetujui oleh :


**Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002**


(Pembimbing 1)


**Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.
NIP. 19830517 200812 1 003**

(Pembimbing 2)


**Dr. Hariyanto, M.Si.
NIP. 19530414 198203 1 002**

(Penguji)


**Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
NIP. 19620407 198703 1 005**

(Penguji)

Dekan FMIPA ITS,


**Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002**

KONVEKSI PAKSA DARI ALIRAN FLUIDA MAGNETOHIRODINAMIK TAK TUNAK YANG MELALUI BOLA BERPORI

Nama Mahasiswa : Nadya Alvi Rahma
NRP : 1215 201 201
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si

ABSTRAK

Magnetohidrodinamik adalah studi mengenai pergerakan aliran fluida yang dapat menghantarkan listrik (konduksi listrik) yang dipengaruhi oleh medan magnet. Fluida kental adalah fluida *Newtonian* yang viskositasnya hanya bergantung pada temperatur dan tekanan. Konveksi paksa adalah perpindahan panas pada fluida yang dipengaruhi oleh gaya eksternal. Pada penelitian ini dikaji perbandingan parameter, yaitu parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi paksa, parameter porositas, dan parameter permeabilitas terhadap kurva kecepatan dan temperatur dengan cara mengembangkan model matematika konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melalui bola berpori dan diselesaikan secara numerik menggunakan metode Keller-Box. Hasil simulasi menunjukkan bahwa kurva kecepatan semakin meningkat dengan bertambahnya parameter magnetik, konveksi paksa, dan porositas, sedangkan semakin menurun dengan bertambahnya parameter permeabilitas. Untuk peningkatan bilangan Prandtl tidak mempengaruhi kecepatan fluida saat konveksi paksa. Kurva temperatur semakin menurun dengan bertambahnya parameter magnetic, konveksi paksa, bilangan Prandtl, dan porositas, sedangkan semakin meningkat dengan bertambahnya parameter permeabilitas.

Kata Kunci : Magnetohidrodinamik, konveksi paksa, fluida kental, metode Keller-Box.

FORCED CONVECTION OF UNSTEADY MAGNETOHYDRODYNAMICS FLUID PAST A POROUS SPHERE

Name : Nadya Alvi Rahma
NRP : 1215 201 201
Supervisor : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si

ABSTRACT

Magnetohydrodynamics is a study about the flow movement of electrically conductive fluid influenced by magnetic field. Viscous fluid is a *Newtonian* fluid in which its viscosity depends on its temperature and pressure. Forced convection is a heat transferred towards a fluid influenced by external force. This research examines the comparison on various parameters, namely magnetic parameter, Prandtl number, forced convection parameter, porosity parameter, and permeability parameter towards the curves of velocity and temperature by developing mathematical model of forced convection from the flow of unsteady Magnetohydrodynamics fluid past a porous sphere and numerically finished using Keller-Box method. The result from simulation, shows that the velocity curve climbed up as the magnetic parameter, convection parameter, and porosity parameter increases, and declines when permeability parameter increases. On the other hand, the increasing of Prandtl numbers do not affect the fluid's velocity on forced convection. Temperature curve declines with the increasing of magnetic parameter, convection parameter, Prandtl number, and porosity parameter, and climbed up when permeability parameter decreases.

Keywords : Magnetohydrodynamics, forced convection, viscous fluid, Keller-box method.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT Yang Maha Besar, Maha Pengasih dan Maha Penyayang, karena atas rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan penelitian dan penulisan tesis yang berjudul “Konveksi Paksa dari Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Tak Tunak yang Melalui Bola Berpori”.

Terselesainya penulisan tesis ini tidak lepas dari dukungan banyak pihak, maka sepatutnya penulis menyampaikan terimakasih kepada Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc selaku pembimbing I dan Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si selaku pembimbing II atas keikhlasannya memberikan motivasi, bimbingan, arahan kepada penulis selama menyusun proposal, melaksanakan penelitian sampai penulisan tesis. Terimakasih kepada kedua orangtua tercinta H. Sunaryo, A.Md dan Hj. Dr. Husnul Chotimah, M.Pd, serta adik tersayang ananda Miqdad Ihkamuddin yang selalu mendukung penulis dengan penuh kesabaran selama menempuh Program Magister Matematika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Ucapan terimakasih dan penghargaan setinggi-tingginya penulis haturkan juga kepada:

1. Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) yang telah memberikan kesempatan kepada penulis diterima sebagai mahasiswa program magister di ITS Surabaya.
2. Dekan FMIPA ITS, Kepala Departemen Matematika ITS, dan Ketua Program Studi Pasca Sarjana Matematika yang telah memberikan fasilitas dalam menempuh pendidikan pascasarjana.
3. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si. selaku Dosen Wali yang telah memberikan bimbingan, kritik, dan saran selama menempuh pendidikan pasca sarjana.
4. Bapak Dr. Hariyanto, M.Si dan Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si selaku dosen penguji atas kritik dan saran sehingga penulis dapat memperbaiki tesis ini.
5. Bapak/Ibu dosen pembina matakuliah pada Program Studi S2 Matematika Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember yang telah memberikan ilmu, kemudahan, dan motivasi kepada penulis selama perkuliahan.

6. Seluruh staf akademik dan administrasi di lingkungan Pascasarjana ITS, FMIPA ITS dan Jurusan Matematika yang telah menyediakan fasilitas dan layanan selama penulis mengikuti program magister di Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
7. Tim Penelitian Magnetohidrodinamik (Rizky Verdyanto Pratomo, S.Pd., Pingkan A M Palyama, S.Pd., dan Mochamad Satria Dharma Utama) atas segala dukungan, kerjasama, dan motivasi selama proses penelitian hingga terselesaikannya tesis ini
8. Teman-teman mahasiswa Program Magister Matematika angkatan 2015 yang “kompak” dengan segala kelebihan dan kekurangan yang dimiliki untuk berjuang bersama. Semoga tali silaturahmi kita tidak putus walaupun kita kembali ke daerah masing-masing.
9. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian tesis ini.

Semoga Allah Azza Wa Jalla senantiasa melimpahkan keberkahan pada tulisan ini dan semoga penelitian ini dapat menjadi rujukan bagi pihak-pihak yang akan melaksanakan penelitian pengembangan dalam upaya memajukan dan mengembangkan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Surabaya, Juli 2017

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN.....	v
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT.....	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xv
DAFTAR TABEL.....	xvii
DAFTAR SIMBOL.....	xix
BAB I. PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Asumsi Penelitian.....	3
1.5 Tujuan Penelitian	4
1.6 Manfaat Penelitian.....	4
BAB II. KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI.....	5
2.1 Penelitian Terdahulu.....	5
2.2 Fluida.....	6
2.3 Fluida <i>Newtonian</i>	7
2.4 Aliran Tak Mampu Mampat Satu Fasa.....	7
2.5 Tipe Aliran Fluida Berdasarkan Kriteria Waktu.....	8
2.6 Konveksi Paksa (<i>Forced Convection Flow</i>).....	8
2.7 Aliran Lapisan Batas (<i>Boundary Layer</i>).....	8
2.8 Porositas dan Permeabilitas.....	9
2.9 Magnetohidrodinamik.....	10
2.10 Skema Keller-Box.....	11
BAB III. METODE PENELITIAN.....	13
3.1 Tahapan Penelitian	13
3.2 Tempat Penelitian.....	14
BAB IV. MODEL MATEMATIKA.....	15

4.1 Persamaan Pembangun.....	16
4.1.1 Persamaan Kontinuitas.....	16
4.1.2 Persamaan Momentum.....	18
4.1.2.1 Gaya Permukaan (<i>Surface Force</i>).....	19
4.1.2.2 Gaya Apung (<i>Buoyancy</i>).....	21
4.1.2.3 Gaya Magnetik (<i>Magnetic Force</i>).....	21
4.1.3 Persamaan Energi.....	23
4.2 Penurunan Persamaan Pembangun.....	27
4.2.1 Persamaan Momentum.....	27
4.2.2 Transformasi Variabel Tak-Berdimensi.....	29
4.2.3 Pendekatan Lapisan Batas.....	31
4.2.4 Fungsi Alir (<i>Stream Function</i>)	32
4.2.5 Persamaan Similaritas.....	33
BAB V. PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA.....	39
5.1 Penyelarasan Notasi.....	39
5.2 Diskritisasi Model.....	40
5.3 Pelinieran Model.....	42
5.4 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier.....	46
5.5 Hasil Simulasi Numerik.....	51
5.5.1 Pengaruh Variasi Parameter Magnetik.....	52
5.5.2 Pengaruh Variasi Parameter Konveksi.....	54
5.5.3 Pengaruh Variasi Bilangan Prandtl.....	56
5.5.4 Pengaruh Variasi Parameter Porositas.....	58
5.5.5 Pengaruh Variasi Parameter Permeabilitas.....	60
BAB VI. KESIMPULAN DAN SARAN.....	63
6.1 Kesimpulan.....	63
6.2 Saran.....	63
DAFTAR PUSTAKA.....	65
BIODATA PENULIS.....	69

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1.	Model Fisik Aliran Fluida yang Melalui Bola Berpori.....	2
Gambar 2.1.	Skema Keller-box	12
Gambar 4.1.	(a) Model Fisik Aliran Fluida yang Melalui Bola Berpori, (b) Sketsa Aliran Fluida yang Melalui Bola Berpori, (c) Volume Kendali.....	15
Gambar 4.2.	Aliran fluida Masuk dan Keluar Volume Kendali.....	17
Gambar 4.3.	Komponen Tegangan Arah x dan y pada Permukaan Elemen Fluida.....	20
Gambar 4.4.	Komponen <i>Heat Flux</i> pada Volume Kendali.....	25
Gambar 5.1.	Skema Beda Hingga Keller-box.....	40
Gambar 5.2.	Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik (M), $\alpha = 0$, $Pr = 4.34$, dan $\phi = 1$	52
Gambar 5.3.	Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik (M), $\alpha = 0$, $Pr = 4.34$, dan $\phi = 1$	53
Gambar 5.4.	Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Konveksi (α), $M = 10$, $Pr = 4.34$, dan $\phi = 1$	54
Gambar 5.5.	Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Konveksi (α), $M = 10$, $Pr = 4.34$, dan $\phi = 1$	55
Gambar 5.6.	Kurva Temperatur dengan Variasi Bilangan Prandtl (Pr), $M = 10$, $\alpha = 0$, dan $\phi = 1$	57
Gambar 5.7.	Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Porositas (ϕ), $M = 10$, $\alpha = 0$, dan $Pr = 4.34$	58
Gambar 5.8.	Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Porositas (ϕ), $M = 10$, $\alpha = 0$, dan $Pr = 4.34$	59
Gambar 5.9.	Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Permeabilitas (K^*), $M = 10$, $\alpha = 0$, dan $Pr = 4.34$	60
Gambar 5.10	Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Permeabilitas (K^*), $M = 10$, $\alpha = 0$, dan $Pr = 4.34$	61

DAFTAR TABEL

Tabel 5.1.	Nilai Kecepatan dengan Variasi Bilang Prandtl (Pr), $M = 10$, $\alpha = 0$, $\phi = 1$	56
------------	--	----

DAFTAR SIMBOL

τ	: Tegangan geser pada fluida.
μ	: Viskositas Fluida.
u	: Komponen kecepatan fluida pada sumbu – x .
k	: Konduktivitas panas fluida
c_p	: Panas jenis pada tekanan konstan
t	: Waktu.
U_∞	: Kecepatan fluida pada aliran bebas.
a	: Panjang karakteristik
ν	: Viskositas kinematik
v	: Komponen kecepatan fluida pada sumbu – y .
ρ	: Densitas fluida
p	: Tekanan.
J	: Kerapatan arus.
B	: Medan magnet
\hat{n}	: Vektor normal terhadap elemen dA
E	: Medan listrik
e	: Energi total per satuan massa setiap partikel sistem
\tilde{u}	: Energi per satuan massa
σ	: Konduktivitas listrik

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini diuraikan mengenai latar belakang yang mendasari penelitian ini dan berdasarkan latar belakang masalah maka dapat disusun rumusan masalah yang mendasari tujuan penelitian serta manfaat penelitian.

1.1 Latar Belakang

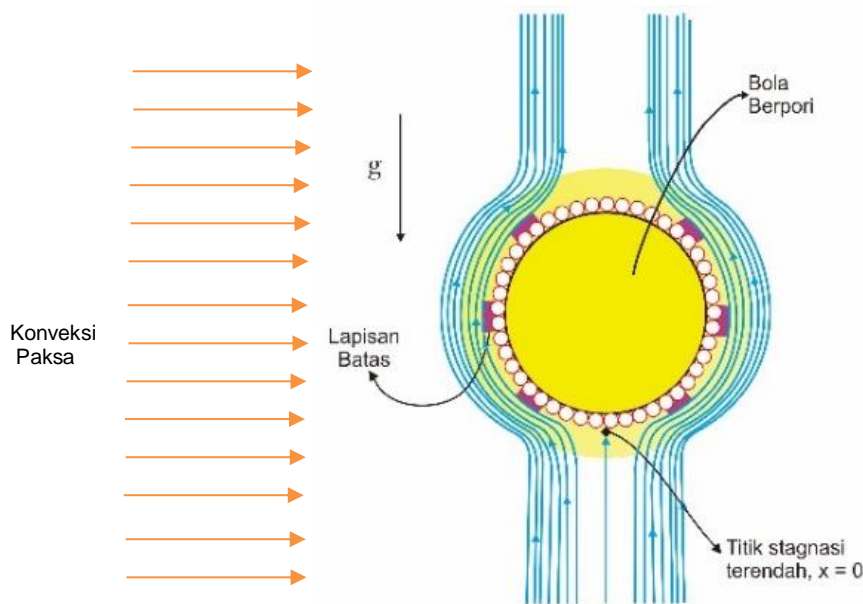
Penelitian mengenai aliran magnetohidrodinamik atau *Magnetohydrodynamic flow* (MHD) telah banyak dilakukan untuk mengembangkan ilmu dalam bidang teknik dan industri, seperti pada penelitian yang dilakukan oleh Adi (2015) yang berjudul *Pemanfaatan Magnetohidrodinamik sebagai Energi Penggerak pada Kapal* dan Anggriani (2016) yang berjudul *Pengaruh Magnetohidrodinamik pada Fluida Micropolar yang Melewati Bola Berpori* yang dapat digunakan dalam pengeboran minyak.

Magnetohydrodynamic (MHD) adalah studi mengenai dinamika fluida konduksi listrik akibat medan magnet. Contoh fluida yang dapat dikonduksi adalah plasma, logam cair, dan air garam atau elektrolit. Konsep dasar MHD adalah medan magnet dapat menginduksi arus listrik pada fluida konduktif yang bergerak, yang pada gilirannya menciptakan gaya pada fluida dan juga mengubah medan magnet itu sendiri (Widodo dkk, 2015a). Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu apabila terkena tegangan geser (Widodo, 2012). Viskositas suatu fluida dapat digunakan untuk menganalisa pengukuran dari pergeseran suatu fluida. Berdasarkan tegangan geser (*shear stress*) dan laju geser (*shear rate*) fluida dibagi menjadi dua yaitu fluida *Newtonian* dan fluida *Non-Newtonian* (Fox dkk, 2011).

Fluida kental adalah fluida *Newtonian* dan sederhana namun tipe dasar dari fluida ini banyak diteliti. Setiap fluida *Newtonian* mengarah pada gerakan dari fluida yang hanya diatur oleh hukum gerak Newton (Fox dkk, 2011).. Terdapat banyak penelitian yang meneliti lapisan batas yang stabil dari aliran fluida kental dengan adanya medan magnet, seperti pada penelitian *An External Flow Passing Various Geometri*, yaitu apabila geometrinya *Stretching Sheet* (Fathizadeh dkk, 2013; Kumaran dkk, 2009), *Shrinking Sheet* (Sajid dan Hayat, 2009), *2D Axisymmetric Bodies* (Hoernel, 2009), *Flat Plate* (Kudenatti dkk, 2013) dan pada bola teriris

(Wijaya, 2016). Keberadaan medan magnet memberikan kontribusi pada meningkatnya temperatur dari aliran fluida kental pada konveksi paksa (Abbas dan Hayat, 2008; Ouaf, 2005). Konveksi paksa menggambarkan perpindahan panas pada fluida yang dipengaruhi oleh kekuatan dari luar (Kasim, 2014).

Penelitian sebelumnya mengenai permasalahan magnetohidrodinamik fluida kental tak tunak dengan konveksi paksa yang mengalir melewati bola bepori dilakukan oleh Anggriani (2016). Perbedaan penelitian ini dengan penelitian-penelitian di atas, yaitu penelitian ini dikaji secara teoritik dan numerik pengaruh medan magnet dan konveksi paksa dari aliran magnetohidrodinamik fluida kental tak tunak yang melalui bola berpori pada lapisan batas yang terletak disekitar titik stagnasi terendah $x = 0^\circ$. Ilustrasi aliran fluida kental yang melewati bola berpori pada penelitian ini dapat dilihat pada Gambar 1.3.



Gambar 1.1 Model fisik Aliran Fluida yang Melalui Bola Berpori

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, yang telah diuraikan, pokok permasalahan yang dikaji dalam tesis ini sebagai berikut.

1. Bagaimana model matematika konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori?
2. Bagaimana penyelesaian numerik dari model matematika konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori?

3. Bagaimana pengaruh medan magnet dan konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori terhadap parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi paksa, parameter porositas, dan parameter permeabilitas terhadap kurva kecepatan dan temperatur pada lapisan batas?

1.3 Batasan Masalah

Penulisan tesis ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah sebagai berikut.

1. Aliran fluida dari bawah ke atas.
2. Aliran fluida dua dimensi yang melewati bola berpori.
3. Geometri benda pada penelitian ini yang diamati adalah bola berpori mengandung magnet.
4. Penelitian ini diutamakan pada aliran lapisan batas yang terbentuk dititik stagnasi terendah $\alpha = 0^\circ$ dan aliran yang meninggalkan bola berpori.

1.4 Asumsi Penelitian

Penulisan tesis ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa asumsi sebagai berikut.

1. Aliran fluidanya diasumsikan kental, *incompressible* dan dalam keadaan tak tunak.
2. Penelitian ini difokuskan pada aliran lapisan batas dengan konveksi paksa.
3. Bola berpori yang diamati terletak pada aliran bebas tanpa halangan di dekat bola.
4. Induksi medan magnet tidak diabaikan.
5. Tidak ada tegangan pada aliran fluida sehingga medan listrik diasumsikan nol.
6. Medan magnet yang dihasilkan dari gaya Lorentz.
7. Untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan pembangun model digunakan metode Keller-Box.

1.5 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penulisan tesis ini sebagai berikut.

1. Mengembangkan model matematika konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori.
2. Menyelesaikan secara numerik model matematika konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori.
3. Menganalisa pengaruh medan magnet dan konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori terhadap parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi paksa, parameter porositas, dan parameter permeabilitas terhadap kurva kecepatan dan temperatur pada lapisan batas.

1.6 Manfaat Penelitian

1. Bidang keilmuan

Diharapkan penelitian ini dapat membantu dalam pengembangan ilmu matematika terapan dan dapat digunakan sebagai referensi bagi penelitian selanjutnya.

2. Masyarakat luas

Diharapkan penelitian ini dapat dimanfaatkan bagi perkembangan teknologi dan industri contohnya dibidang pengeboran minyak.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Pada bab ini diuraikan mengenai penelitian terdahulu dan perbedaan dengan usulan penelitian yang akan dilakukan. Selain itu juga diberikan uraian mengenai teori – teori yang digunakan sebagai bahan penunjang penelitian.

2.1 Penelitian Terdahulu

Penelitian – penelitian terkait yang pernah dilakukan sebelumnya yaitu sebagai berikut.

- 1 Khalimah (2015) dalam penelitiannya yang menganalisa aliran tak tunak konveksi paksa fluida kental magnetohidrodinamik yang melewati silinder eliptik, telah mengkaji pengaruh hubungan parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi, dan variasi sumbu vertikal dan horizontal pada silinder eliptik. Dalam penelitiannya ini, melalui simulasi numerik diperoleh hubungan parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi dan variasi sumbu vertikal dan horizontal pada silinder eliptik yaitu profil kecepatan fluida semakin besar dengan bertambahnya parameter magnetik, parameter konveksi dan bertambah panjangnya sumbu vertikal, sedangkan bertambahnya sumbu horizontal akan mengakibatkan kecepatan fluida menurun. Untuk kasus bilangan Prandtl yang nilainya diperbesar, kecepatan fluida mengalami penurunan yang tidak signifikan. Untuk profil temperatur fluida, temperatur semakin menurun dengan bertambahnya parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi dan sumbu vertikal, sedangkan temperatur fluida mengalami kenaikan pada saat bertambahnya sumbu horizontal silinder eliptik.
- 2 Widodo dkk (2015) dalam makalah *The Effect of Prandtl Number and Magnetic Parameter on Forced Convection Unsteady Magnetohydrodynamic Boundary Layer Flow of A Viscous Fluid Past A Sphere* menjelaskan mengenai solusi numerik aliran magnetohidrodinamik tak tunak pada konveksi paksa dan perpindahan panas pada fluida kental yang melalui bola dengan menggunakan metode Keller-Box. Hasil yang diperoleh dari solusi dan simulasi numerik menunjukkan bahwa ketika parameter magnetik bertambah maka distribusi temperatur fluida berkurang dan ketika parameter magnetik berkurang maka

distribusi kecepatan fluida juga berkurang.

- 3 Anggriani (2016) dalam penelitiannya yang berjudul *Pengaruh Magnetohidrodinamik pada Fluida Micropolar yang Melewati Bola Berpori* menjelaskan mengenai pengaruh parameter magnetik dan permeabilitas terhadap profil kecepatan dan mikro rotasi pada lapisan batas dengan menggunakan metode Keller-Box. Hasil yang diperoleh dari solusi dan simulasi numerik menunjukkan bahwa semakin meningkat parameter magnetik maka semakin meningkat profil kecepatan aliran. Sedangkan pada profil mikro rotasi terdapat dua kondisi, semakin meningkatnya parameter magnetik pada aliran pekat, maka semakin menurun kecepatan rotasi partikel *micropolar* dan diawali keadaan diam tetapi pada aliran agak pekat semakin meningkatnya parameter magnetik maka semakin meningkat kecepatan rotasi partikel *micropolar*. Semakin meningkat parameter permeabilitas maka semakin menurun profil kecepatan aliran fluida. Sedangkan pada profil mikro rotasi terdapat dua kondisi, semakin meningkatnya parameter permeabilitas pada aliran pekat, maka semakin meningkat kecepatan rotasi partikel *micropolar* tetapi pada aliran agak pekat semakin meningkatnya parameter permeabilitas maka semakin menurun kecepatan rotasi partikel *micropolar*.

2.2 Fluida

Fluida merupakan zat yang dapat berubah bentuk secara terus – menerus jika terkena tegangan geser meskipun tegangan geser itu kecil. Tegangan geser adalah gaya geser dibagi dengan luas permukaan tempat adanya gaya geser tersebut. Gaya geser adalah komponen gaya yang menyinggung permukaan (Elseth, 2001).

Fluida mempunyai dua sifat fisik yaitu viskositas dan densitas. Dimana viskositas adalah sifat fluida yang diberikannya tahanan terhadap tegangan geser oleh fluida tersebut. Besar kecilnya viskositas fluida tergantung pada suhu fluida tersebut. Untuk fluida cair, makin tinggi suhunya, maka viskositasnya makin kecil, sedang untuk fluida gas, makin tinggi suhunya, maka viskositasnya makin besar. Sedangkan densitas atau kerapatan suatu fluida didefinisikan sebagai *massa* per satuan *volume* (Elseth, 2001). Berdasarkan tegangan geser (*shear stress*) dan laju geser atau laju regangan geser (*shear rate*) fluida dibagi menjadi dua yaitu fluida *Newtonian* dan

fluida *Non-Newtonian* (Fox dkk, 2011).

Fluida diklasifikasikan sebagai fluida *Newtonian* dan *non-Newtonian*. Namun, apabila fluida yang tegangan gesernya tidak berhubungan secara linier terhadap laju regangan geser dinamakan *Fluida non-Newtonian*. Sedangkan hidrokarbon berantai panjang yang kental bersifat *non-Newtonian* (Fox dkk, 2011).

2.3 Fluida Newtonian

Dalam fluida *Newtonian* hubungan antara tegangan geser dan laju regangan geser harus linier dengan kemiringan viskositas tersebut. Viskositas dari fluida *Newtonian* hanya bergantung pada temperatur dan tekanan. Gas dan cairan encer cenderung bersifat fluida *Newtonian*. Rumus untuk tegangan geser pada fluida *Newtonian* adalah sebagai berikut (Fox dkk, 2011).

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

dengan:

τ = tegangan geser pada fluida (N/m^2)

μ = viskositas fluida ($N/m^2 \cdot s$)

$\frac{du}{dy}$ = gradien kecepatan fluida (s^{-1})

2.4 Aliran Tak Mampu Mampat Satu Fasa

Aliran satu fasa hanya mengandung satu jenis fluida, misalnya cair atau gas tanpa ada partikel lain. Aliran air, minyak, gas alami, udara, dan lain-lain merupakan contoh aliran satu fasa. Sebuah aliran dikatakan *incompressible* (tak mampu mampat) jika pada suatu sistem aliran memiliki massa jenis tetap. Sebuah aliran dikatakan homogen jika densitasnya konstan sepanjang aliran. Sebuah aliran *incompressible* satu fasa merupakan aliran homogen, sedangkan aliran mampu mampat (*compressible*) merupakan aliran non homogen. Secara normal, cairan dan gas diperlakukan sebagai aliran *incompressible*. Namun, aliran tidak dapat dikatakan *incompressible* jika kecepatan gas mendekati, sama atau melebihi kecepatan suara (Fox dkk, 2011).

2.5 Tipe Aliran Fluida Berdasarkan Kriteria Waktu

Tipe aliran fluida yang memiliki pengaruh terhadap perubahan waktu pada umumnya dibagi menjadi dua, yaitu: (Widodo, 2012)

1. Aliran Tunak (*Steady Flow*) Aliran tunak yaitu kecepatan aliran fluida tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tunak berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

2. Aliran Tak Tunak (*Unsteady Flow*) Aliran tak tunak yaitu kecepatan aliran fluida yang dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tak tunak berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

2.6 Konveksi Paksa (*Forced Convection Flow*)

Konveksi untuk menunjukkan pada perpindahan panas yang akan terjadi antara permukaan dan fluida yang bergerak ketika mereka berada pada perbedaan temperatur. Menurut keadaan alirannya perpindahan panas secara konveksi dikategorikan menjadi dua, yaitu konveksi bebas dan konveksi paksa. Konveksi paksa adalah perpindahan panas yang mana alirannya tersebut berasal dari luar, seperti dari blower atau kran dan pompa. Konveksi paksa dalam pipa merupakan persoalan perpindahan konveksi untuk aliran dalam atau yang disebut dengan *internal flow*. Adapun aliran yang terjadi dalam pipa adalah fluida yang dibatasi oleh suatu permukaan. Sehingga lapisan batas tidak dapat berkembang secara bebas seperti halnya pada aliran luar (Walujodjati, 2009).

2.7 Aliran Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Konsep lapisan batas pertama kali dikemukakan oleh ilmuwan Jerman, Prandtl, pada tahun 1904. Lapisan batas adalah suatu lapisan tipis yang terbentuk pada permukaan padat sebagai akibat adanya aliran dari suatu fluida (Hussanan dkk, 2014). Pada dasarnya lapisan batas membagi daerah aliran sekitar benda ke dalam dua domain, yaitu 1) lapisan tipis yang meliputi permukaan benda tersebut di mana gradien kecepatan dan gaya viskosnya besar dan 2) daerah di luar lapisan batas tersebut di mana kecepatan hampir sama dengan nilai aliran bebas (*free-stream*) serta efek viskositas dapat diabaikan. Dengan memakai konsep lapisan batas, persamaan gerak yang biasanya disebut *Navier-Stokes*, dapat diturunkan ke bentuk yang dapat

diselesaikan. Pengaruh viskositas terhadap aliran data ditentukan dan koefisien gesekan sepanjang permukaan benda dapat dihitung. (Iskandar dkk, 2014)

Bilangan Reynold untuk suatu aliran fluida dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut:

$$Re = \frac{U_{\infty} a}{\nu}$$

dengan:

Re = Bilangan Reynolds

U_{∞} = Kecepatan pada aliran bebas (m/s)

a = Panjang karakteristik

ν = Viskositas kinematik

Proses transfer yang berlangsung pada fluida dan benda padat adalah momentum masa dan perpindahan panas. Pada saat memformulasikan hukum kekekalan massa, momentum, dan energi, hukum termodinamik dan gas dinamik juga harus diperhatikan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa bersama dengan aliran boundary layer, ada juga *thermal boundary layer* dan pengaruh timbal balik dari lapisan-lapisan batas lain juga harus diperhitungkan. Teori mengenai lapisan batas digunakan pada berbagai ilmu teknik sains, seperti hidrodinamik, aerodinamik, *automobile* dan teknik kelautan (Hussanan dkk, 2014)

2.8 Porositas dan Permeabilitas

Porositas adalah kemampuan suatu benda/ media berpori (misalnya batuan atau tanah) untuk menyerap dan menahan suatu fluida di dalamnya. Porositas suatu benda erat kaitannya dengan permeabilitas. Permeabilitas pada mekanika fluida (biasanya dilambangkan dengan κ atau K^*) adalah suatu parameter yang menunjukkan kemampuan suatu benda/media berpori (misalnya batuan, tanah, atau benda tidak terkonsolidasi) untuk memungkinkan suatu fluida mengalir melewatinya. Dalam mekanika fluida media berpori, persamaan momentum atau keseimbangan kekuatan memenuhi pengamatan eksperimen yang secara matematis sebagai hukum Darcy. Observasi ini pertama kali dilakukan oleh Darcy, yang menemukan bahwa daerah rata-rata kecepatan fluida melalui suatu kolom bahan berpori sebanding dengan tekanan gradien dibentuk sepanjang kolom. Percobaan selanjutnya membuktikan bahwa daerah-rata-rata kecepatan berbanding terbalik dengan viskositas μ dari cairan yang

merembes melalui bahan berpori. Dengan mengacu pada pengamatan Darcy diterapkan (Bejan, 2013):

$$\mathbf{u} = \frac{K^*}{\mu} \left(-\frac{dP}{dx} \right) \quad \text{dan} \quad \phi = \frac{a\mu}{\rho U_{\infty} K^*}$$

dimana K^* merupakan permeabilitas dan ϕ merupakan parameter porositas.

2.9 Magnetohidrodinamik

Magnetohidrodinamik (MHD) adalah studi mengenai pergerakan aliran fluida yang dapat menghantarkan listrik (konduksi listrik) yang dipengaruhi oleh medan magnet (Widodo dkk, 2015a). Contoh fluida yang dapat menghantarkan listrik adalah plasma, logam cair, dan air garam atau elektrolit. MHD diperkenalkan dan dikembangkan oleh Hannes Alfven seorang fisikawan yang pernah mendapatkan nobel dalam fisika pada tahun 1970 (Khalimah, 2015). MHD berperan penting dalam fisika solar, astrofisika, fisika plasma, dan eksperimen plasma laboratorium. Himpunan persamaan yang menggambarkan MHD adalah kombinasi dari persamaan *Navier- Stokes* pada dinamika fluida dan persamaan Maxwell pada elektromagnetik (Arber, 2013).

Bentuk persamaan MHD terdiri dari persamaan fluida yakni persamaan kontinuitas, persamaan energi, dan untuk persamaan pada medan magnetnya menggunakan persamaan Maxwell. Berikut ini adalah persamaan-persamaan dasar untuk membuat persamaan MHD yang ideal :

1. Persamaan momentum:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

2. Persamaan konservasi massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

3. Persamaan konservasi energi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

4. Persamaan Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

dengan:

\mathbf{B} = Medan magnet

\mathbf{E} = Medan listrik

\mathbf{u} = Kecepatan massa fluida

\mathbf{J} = Kerapatan arus

ρ = Massa jenis

p = Tekanan fluida

t = Waktu

μ_0 = Permeabilitas ruang hampa ($4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

Pada persamaan MHD di atas, persamaan (2.1) pada persamaan Maxwell tidak digunakan. Persamaan (2.1) hanya dipakai saat kondisi awal saja. Selain itu, untuk kecepatan rendah, perpindahan arusnya bisa diabaikan atau dianggap nol (Arber. 2013). Sehingga persamaan umum dari MHD menjadi:

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

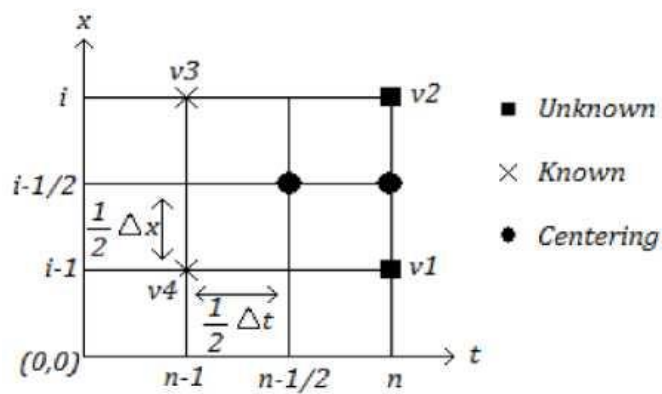
$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

2.10 Skema Keller-Box

Metode Keller-Box adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan persamaan parabolik, terutama persamaan lapisan batas. Skema ini merupakan bentuk implisit dengan keakurasiannya orde kedua baik terhadap ruang maupun waktu yang mana *step size* untuk waktu dan ruang tidak harus sama (*non-uniform*). Khalimah (2015) dalam penelitiannya menggunakan metode Keller-Box untuk menyelesaikan permasalahan lapisan batas dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Persamaan orde dua atau orde tinggi diubah menjadi persamaan diferensial orde satu.
2. Dilakukan diskritisasi dengan menggunakan beda hingga pusat.
3. Dilakukan diskritisasi persamaan yang didapat dengan menggunakan metode Newton dan dibentuk dalam matriks vektor.
4. Hasil linierisasi diselesaikan dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.



Gambar 2.1 Skema Keller-Box (Al-Shibani dkk, 2012)

BAB III

METODE PENELITIAN

Secara detail, desain dan metode penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut:

3.1 Tahapan Penelitian

Tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji model matematika konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori.

Setiap model mempunyai karakteristik tertentu sehingga untuk mengembangkan model perlu dikaji terlebih dahulu dalam kaitan untuk mendapatkan model konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori yang diusulkan dalam penelitian ini.

2. Mengkaji model matematika konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori.

Pada tahap ini dikaji beberapa model konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori yang telah dihasilkan dari peneliti sebelumnya dan model konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori yang diusulkan dalam penelitian ini.

3. Mengembangkan model konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori menggunakan *continuum principle* dan hukum-hukum fisika.

4. Mengembangkan metode beda hingga implisit dengan skema Keller-Box untuk penyelesaian model matematika konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori.

Pada tahap ini akan diselesaikan secara numerik permasalahan konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori.

5. Membuat algoritma program

Pada tahapan ini, akan dibuat algoritma program dari penyelesaian metode beda hingga implisit dengan skema Keller-Box terhadap model matematika konveksi

paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori.

6. Membuat program

Algoritma yang telah dibuat diimplementasi dalam bentuk program dengan menggunakan program Matlab.

7. *Running* program

Program yang telah dibuat dijalankan dengan memasukkan inputan dan dianalisa hasil luaran numeriknya.

8. Verifikasi

Tahap pembangunan model matematika dari konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori sampai pada hasil *output* program diverifikasi kembali.

9. Simulasi

Dengan menggunakan program yang telah dibuat, dilakukan simulasi dengan menggunakan beberapa nilai pada parameter atau/dan variabel inputan.

10. Analisis hasil dan pembahasan.

Hasil yang diperoleh dari beberapa simulasi yang dilakukan akan dianalisis dan dibahas, untuk kemudian dicari solusi numerik terbaik dari konveksi paksa dari aliran fluida magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori dan membuat kesimpulan.

11. Pembuatan laporan

12. Diseminasi Hasil Penelitian

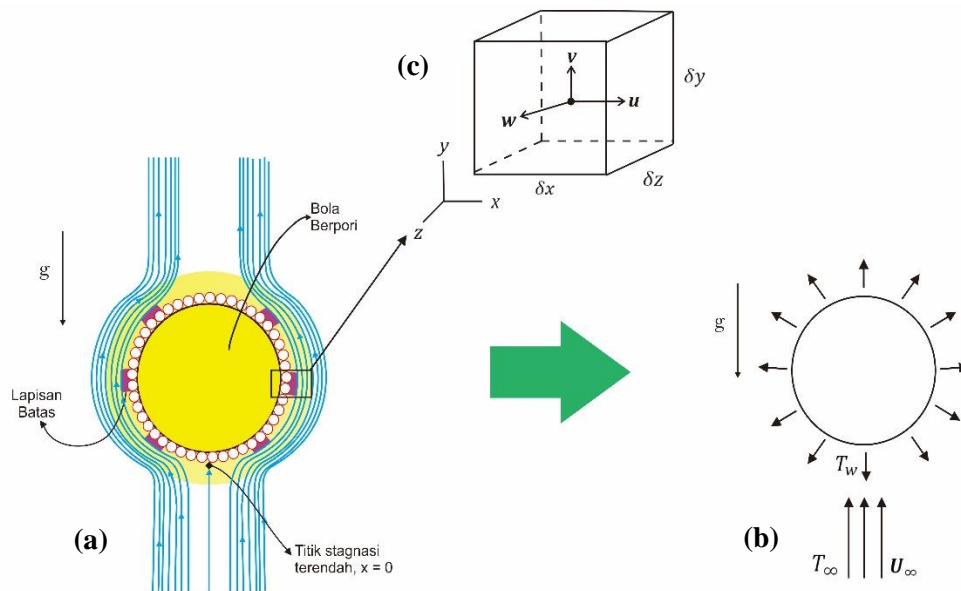
3.2 Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

BAB IV

MODEL MATEMATIKA

Model matematika konveksi paksa dari aliran fluida kental magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori dalam bentuk model matematika yang berdimensi kemudian ditransformasikan ke bentuk model matematika yang tak berdimensi dan selanjutnya dibentuk model similar dijelaskan pada bab ini. Pada penelitian ini, fluida kental tidak bermagnet mengalir dari bawah ke atas melalui bola berpori yang memuat magnet sehingga ketika melalui bola berpori, fluida kental terinduksi medan magnet dari bola berpori yang menyebabkan fluida kental menjadi fluida kental magnetohidrodinamik atau fluida yang memuat medan magnet seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.1(a).



Gambar 4.1 (a) Model Fisik Aliran Fluida yang Melewati Bola Berpori, (b) Sketsa Aliran Fluida yang Melewati Bola Berpori, (c) Volume Kendali

Gambar 4.1(b), suhu aliran fluida sebelum melalui bola berpori adalah T_∞ dan suhu permukaan fluida saat melalui bola berpori adalah T_w . Kecepatan fluida sebelum melalui bola berpori adalah U_∞ . Lapisan tipis dan elemen kecil yang terbentuk karena adanya gesekan antara fluida kental dengan bola berpori disebut lapisan batas yang dapat dibuat persamaan pembangunnya dengan pendekatan volume kendali seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.1(c).

4.1 Persamaan Pembangun

Persamaan pembangun yang digunakan pada penelitian ini adalah persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi yang diuraikan dari Hukum Kekekalan massa, Hukum II Newton, dan Hukum I Termodinamika. Penjelasan dari persamaan pembangun yang digunakan adalah sebagai berikut.

4.1.1 Persamaan Kontinuitas

Hukum konservasi massa merupakan laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem sama dengan nol atau jumlah massa dalam suatu sistem adalah konstan, dapat dituliskan sebagai berikut (Potter dkk, 2012):

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0 \quad (4.1)$$

dengan $\frac{DQ}{Dt}$ adalah material dan M_{sys} adalah massa sistem yang sama dengan jumlah dari semua perkalian antara densitas fluida dengan volume fluida pada sistem tersebut yang dinyatakan dengan

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho dV \quad (4.2)$$

dengan ρ adalah densitas fluida dan V adalah volume fluida. Substitusi Persamaan (4.2) ke Persamaan (4.1) sehingga dapat diperoleh

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho dV = 0 \quad (4.3)$$

Menurut Teorema Pengangkutan Reynolds, laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem adalah

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA \quad (4.4)$$

Substitusi Persamaan (4.4) ke Persamaan (4.3) sehingga dapat diperoleh

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA \quad (4.5)$$

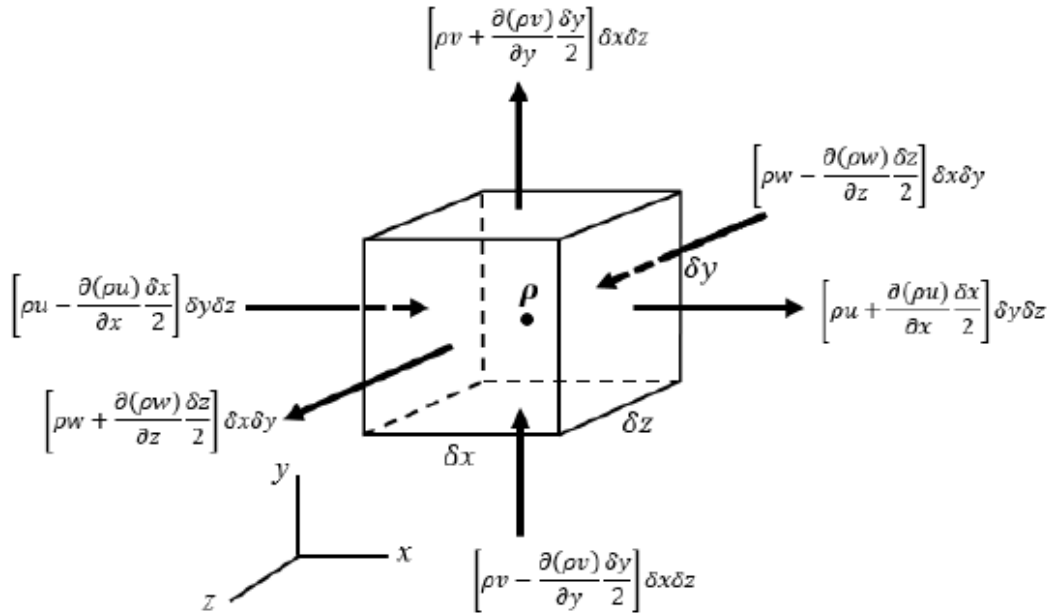
dengan $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ adalah komponen kecepatan fluida yang tegak lurus dan \hat{n} adalah vektor normal terhadap elemen dA . Jadi $\rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA$ laju aliran massa melalui dA . Karena $\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0$ maka Persamaan (4.5) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (4.6)$$

yang merupakan persamaan volume kendali untuk kekekalan massa.

Misalkan volume kendali yang digunakan berupa sebuah elemen kubus kecil dalam keadaan diam seperti pada Gambar 4.1(c). Pada bagian pusat elemen terdapat densitas ρ dan komponen kecepatan u , v , dan w . Karena elemen diasumsikan kecil, maka laju perubahan terhadap waktu dari massa dari kandungan volume kendali yaitu sebagai berikut.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (4.7)$$



Gambar 4.2 Aliran Fluida Masuk dan Keluar Volume Kendali

Jumlah aliran massa pada permukaan elemen dapat diperoleh melalui sumbu koordinat yang digambarkan secara terpisah. Sebagaimana Gambar 4.2, aliran massa pada sumbu-x digambarkan dengan jumlah massa aliran yang masuk dan keluar terdapat pada bagian pusat elemen. Aliran yang keluar didefinisikan sebagai berikut.

$$\rho u \Big|_{x+\frac{\delta x}{2}} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (4.8)$$

sedangkan untuk bagian aliran yang masuk adalah:

$$\rho u \Big|_{x-\frac{\delta x}{2}} = \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (4.9)$$

Sehingga jumlah aliran massa yang keluar pada arah-x data didefinisikan sebagai berikut.

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (4.10)$$

Dengan proses yang sama seperti Persamaan (4.8), (4.9) dan (4.10), maka didapatkan aliran massa yang keluar pada arah-y sebagai berikut.

$$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z - \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z = \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (4.11)$$

dan aliran massa yang keluar pada arah-z adalah sebagai berikut.

$$\left[\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y - \left[\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (4.12)$$

Sehingga total aliran dari Persamaan (4.10), (4.11), dan (4.12) dapat ditulis sebagai berikut.

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (4.13)$$

Sehingga laju perubahan waktu dari massa sistem diperoleh dari substitusi Persamaan (4.7) dan (4.13) ke Persamaan (4.6) yaitu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z = 0 \quad (4.14)$$

Apabila kedua ruas Persamaan (4.14) dibagi dengan $\delta x \delta y \delta z$ sehingga diperoleh

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.15)$$

Pada penelitian ini diasumsikan bahwa aliran fluida yang di analisa adalah aliran dua dimensi, sehingga Persamaan (4.15) menjadi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (4.16)$$

Persamaan (4.16) dapat ditulis dalam bentuk notasi vektor sebagai berikut.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

Pada penelitian ini diasumsikan fluida bersifat *incompressible*, yaitu densitas fluida tidak bergantung terhadap waktu ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) sehingga persamaan kontinuitasnya sebagai berikut.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

4.1.2 Persamaan Momentum

Prinsip dari persamaan momentum adalah Hukum II Newton, yaitu jumlah gaya yang bekerja pada sistem sama dengan besar perubahan momentum pada sistem terhadap waktu. Karena momentum didefinisikan sebagai hasil kali massa dengan kecepatan, maka momentum dari sebuah partikel kecil ρdV adalah $\rho \mathbf{u} dV$, sehingga

momentum dari seluruh sistem dinyatakan dengan notasi $\int_{sys} \rho \mathbf{u} dV$. Hukum II Newton dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho \mathbf{u} dV = \sum F \quad (4.17)$$

dengan menggunakan Teorema Pengangkutan Reynolds, maka laju perubahan terhadap waktu dari momentum adalah

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho \mathbf{u} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \mathbf{u} dV + \int_{cs} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{n} dA) \quad (4.18)$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan Persamaan (4.18) ke Persamaan (4.17) diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \mathbf{u} dV + \int_{cs} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{n} dA) = \sum F \quad (4.19)$$

Berdasarkan persamaan kontinuitas, maka persamaan (4.19) dapat dibentuk dalam notasi vektor, yaitu

$$\rho \left(\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \right) \delta x \delta y \delta z = \sum F \quad (4.20)$$

Berdasarkan sifat divergensi bahwa $\nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + (\mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}))$ karena $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ maka $\nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, sehingga Persamaan (4.20) menjadi

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \delta x \delta y \delta z = \sum F \quad (4.21)$$

Dengan $\sum F$ menunjukkan komponen gaya-gaya yang bekerja pada permukaan bola berpori. Dengan demikian Persamaan (4.21) dapat ditulis sebagai berikut.

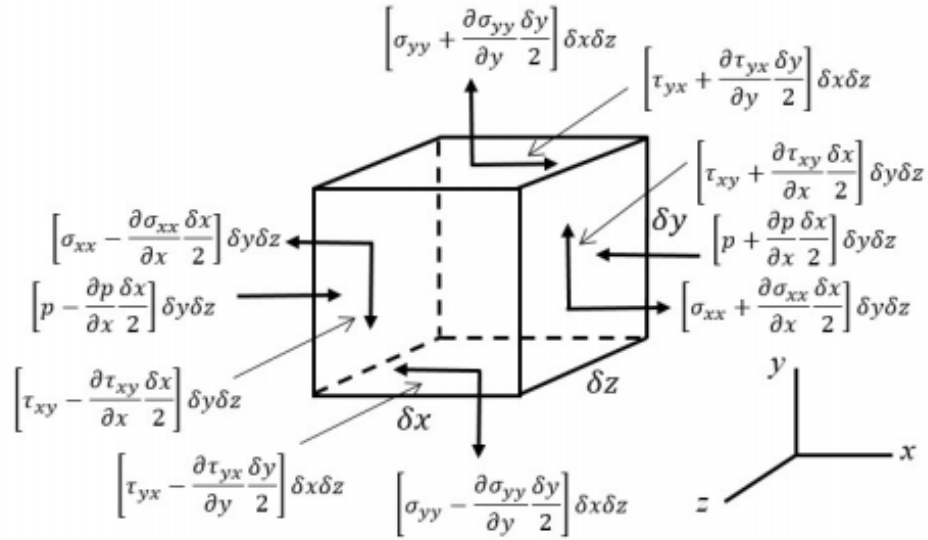
$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) \delta x \delta y \delta z = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_{buo} + \mathbf{F}_{mag} \quad (4.22)$$

dengan \mathbf{F}_s adalah gaya permukaan, \mathbf{F}_{buo} adalah gaya apung, dan \mathbf{F}_{mag} adalah gaya magnet. Pada Persamaan (4.22) kedua ruas dibagi dengan $\delta x \delta y \delta z$ sehingga diperoleh

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \frac{\mathbf{F}_s}{\delta x \delta y \delta z} + \frac{\mathbf{F}_{buo}}{\delta x \delta y \delta z} + \frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} \quad (4.23)$$

4.1.2.1 Gaya Permukaan (*Surface Force*)

Gaya permukaan (\mathbf{F}_s) merupakan gaya yang bekerja pada elemen sebagai hasil interaksi dengan materi sekeliling. Gaya-gaya permukaan yang bekerja pada elemen kubus kecil suatu fluida dapat dinyatakan dalam bentuk tegangan-tegangan yang bekerja pada permukaan sebagaimana Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Komponen Tegangan Arah x dan y pada Permukaan Elemen Fluida

Jumlah seluruh gaya pada arah- x dapat diuraikan sebagai berikut.

$$\mathbf{F}_{sx} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta z$$

dan gaya dalam arah- y

$$\mathbf{F}_{sy} = \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z$$

Sehingga dapat dituliskan resultan gaya permukaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s &= \mathbf{F}_{sx} \hat{i} + \mathbf{F}_{sy} \hat{j} \\ \frac{\mathbf{F}_s}{\delta x \delta y \delta z} &= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \hat{i} + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \hat{j} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Pada penelitian ini diasumsikan bahwa fluida adalah Newtonian yaitu tidak termampatkan (*incompressible*), sehingga tegangan-tegangannya sebanding dengan laju deformasi:

a. Tegangan normal

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.25)$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.26)$$

b. Tegangan geser

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.27)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.25) – (4.27) ke Persamaan (4.24) diperoleh

$$\frac{\mathbf{F}_s}{\delta x \delta y \delta z} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \cdot \mathbf{u} \quad (4.28)$$

4.1.2.2 Gaya Apung (*Buoyancy*)

Gaya apung dapat dituliskan sebagai $\mathbf{F}_{buo} = \rho \mathbf{g} \delta x \delta y \delta z$. Sedangkan untuk tekanan p pada Persamaan (4.28) dapat dituliskan dengan pernyataan bahwa $p = p_d + p_h$ dengan p_h merupakan tekanan hidrostatik dan p_d merupakan tekanan dinamik. Bentuk gradien tekanan yang disebabkan oleh tekanan hidrostatik dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\nabla p_h = \rho_\infty \mathbf{g}$$

dengan ρ_∞ adalah massa jenis fluida di luar area lapisan batas. Selanjutnya, bentuk $-\nabla p$ pada Persamaan (4.28) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$-\nabla p_d - \nabla p_h = -\nabla p_d - \rho_\infty \mathbf{g} \quad (4.29)$$

Selanjutnya p_d dituliskan tanpa subskrip 'd'.

4.1.2.3 Gaya Magnetik (*Magnetic Force*)

Selain gaya permukaan yang bekerja, juga terdapat gaya Lorentz dalam persamaan momentum karena adanya medan magnet, maka Gaya Lorentz dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} = \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.30)$$

dengan \mathbf{E} adalah medan listrik, \mathbf{J} massa jenis arus, dan \mathbf{B} adalah total medan magnet yang terjadi dalam sistem. Sedangkan menurut hukum Ohm, massa jenis arus dapat dituliskan dalam bentuk

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (4.31)$$

dengan σ adalah konduktifitas listrik. Jika disubstitusikan Persamaan (4.31) ke Persamaan (4.30) maka diperoleh

$$\frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} = \mathbf{E} + \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (4.32)$$

Pada penelitian ini diasumsikan bahwa tidak ada tegangan listrik pada aliran fluida, sehingga medan listrik (\mathbf{E}) diasumsikan sama dengan nol. Oleh karena itu, Persamaan (4.32) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} = \sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (4.33)$$

Karena \mathbf{B} adalah total medan magnet yang merupakan jumlahan dari medan magnet dari bola berpori yang mengandung magnet yaitu B_0 dengan medan magnet dari fluida yang terinduksi oleh bola bermagnet yaitu \mathbf{b} , atau dapat dituliskan secara matematis yaitu

$$\mathbf{B} = \mathbf{b} + B_0 \quad (4.34)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.34) ke Persamaan (4.33) maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} &= \{\sigma(\mathbf{u} \times (\mathbf{b} + B_0))\} \times (\mathbf{b} + B_0) \\ \Leftrightarrow \frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} &= \{\sigma((\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \times B_0))\} \times (\mathbf{b} + B_0) \end{aligned}$$

dengan,

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} \\ \Leftrightarrow (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) &= (vb)i - (ub)j + 0k \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$(\mathbf{u} \times B_0) = (vB_0)i - (uB_0)j + 0k$$

Sehingga

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \times B_0) = (v(b + B_0))i + (-u(b + B_0))j + 0k$$

Maka

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \times B_0)) \times (\mathbf{b} + B_0) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ v(b + B_0) & -u(b + B_0) & 0 \\ 0 & 0 & (b + B_0) \end{vmatrix} \\ \Leftrightarrow ((\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \times B_0)) \times (\mathbf{b} + B_0) &= (-u(b^2 + 2ubB_0 + B_0^2))i - (v(b^2 + 2ubB_0 + B_0^2))j + 0k \\ \Leftrightarrow ((\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \times B_0)) \times (\mathbf{b} + B_0) &= (-u(b + B_0)^2)i - (v(b + B_0)^2)j + 0k \\ \Leftrightarrow ((\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{u} \times B_0)) \times (\mathbf{b} + B_0) &= (-u(b + B_0)^2, -v(b + B_0)^2, 0) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} = \sigma(-u(b + B_0)^2, -v(b + B_0)^2, 0) \quad (4.35)$$

Persamaan (4.35) dapat dinyatakan dalam bentuk vektor sebagai berikut :

$$\frac{F_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} = -\sigma(b + B_0)^2 \mathbf{u} \quad (4.36)$$

Pada penelitian ini dikaji aliran fluida kental yang dipengaruhi oleh medan magnet (MHD). Menurut Raptis dan Perdikis (1983) tentang permasalahan aliran fluida kental yang melewati bola berpori dapat digunakan hukum Darcy. Berdasarkan Hukum Darcy mengenai gaya yang bekerja pada fluida $\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0)$, bahwa:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{\mu}{K^*} \mathbf{u} \quad (4.37)$$

dengan K^* adalah permeabilitas benda dan μ adalah viskositas fluida. Karena $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{F_{mag}}{\delta x \delta y \delta z}$ dan $\frac{F_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} = -\sigma(b + B_0)^2 \mathbf{u}$, maka Persamaan (4.37) dapat ditulis

$$\mathbf{F} = -\sigma(b + B_0)^2 \mathbf{u} - \frac{\mu}{K^*} \mathbf{u} \quad (4.38)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.38), Persamaan (4.28), dan Persamaan (4.29) serta \mathbf{F}_{buo} ke Persamaan (4.23) diperoleh persamaan momentum sebagai berikut.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g} - \sigma(b + B_0)^2 \mathbf{u} - \frac{\mu}{K^*} \mathbf{u}$$

dengan $\mathbf{g} = (g_x, g_y, 0)$.

4.1.3 Persamaan Energi

Pada penelitian ini menggunakan persamaan energi karena adanya temperatur yang berbeda dari aliran fluida sehingga menimbulkan adanya perpindahan energi yang berasal dari kalor antara media dengan fluida. Fenomena ini menunjukkan berlakunya hukum I Termodinamika mengenai energi total yang tersimpan dari suatu sistem. Hukum I Termodinamika untuk sebuah sistem adalah laju pertambahan terhadap waktu dari energi total yang tersimpan dari suatu sistem sama dengan laju netto pertambahan energi dari kalor ke dalam sistem ditambah dengan laju netto pertambahan dari kerja yang dipindahkan ke dalam sistem. Hukum I Termodinamika dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e_p dV = \left(\sum \dot{Q}_{in} - \sum \dot{Q}_{out} \right)_{sys} + \left(\sum \dot{W}_{in} - \sum \dot{W}_{out} \right)_{sys}$$

atau dapat ditulis:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e_p dV = (\dot{Q}_{innetto} + \dot{W}_{innetto})_{sys} \quad (4.39)$$

Energi total yang tersimpan per satuan massa dari setiap partikel di dalam sistem (e), dihubungkan dengan energi dalam per satuan massa (\check{u}), energi kinetik per satuan massa ($\frac{V^2}{2}$), dan energi potensial per satuan massa (gz), diperoleh persamaan

$$e = \check{u} + \frac{V^2}{2} + gz \quad (4.40)$$

Hal ini karena volume kendali untuk hukum pertama termodinamika berimpit dengan sebuah sistem, maka diperoleh persamaan menurut Teorema Pengangkutan Reynolds, yaitu

$$\frac{D}{Dt} \int_{\text{sys}} e \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{cv}} e \rho dV + \int_{\text{cs}} e \rho (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA \quad (4.41)$$

Substitusi Persamaan (4.41) ke Persamaan (4.39) sehingga dapat diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{cv}} e \rho dV + \int_{\text{cs}} e \rho (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA = (\dot{Q}_{\text{innetto}} + \dot{W}_{\text{innetto}})_{\text{cv}} \quad (4.42)$$

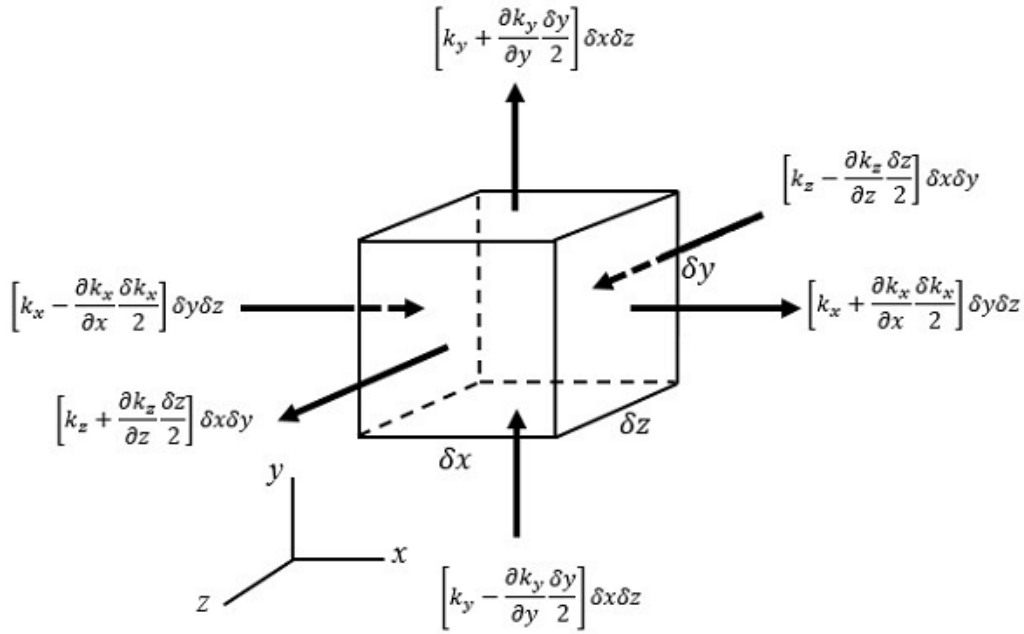
Karena pada penelitian ini benda dianggap diam maka tidak terjadi usaha pada sistem, maka $\dot{W} = 0$, sehingga Persamaan (4.42) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{cv}} e \rho dV + \int_{\text{cs}} e \rho (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA = (\dot{Q}_{\text{innetto}})_{\text{cv}} \quad (4.43)$$

Berdasarkan persamaan kontinuitas, maka Persamaan (4.43) dapat dibentuk menjadi

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \mathbf{u}) \right) \delta x \delta y \delta z = (\dot{Q}_{\text{innetto}})_{\text{cv}} \quad (4.44)$$

Laju netto pertambahan energi dari kalor ke dalam sistem (\dot{Q}_{innetto}) terdiri dari konduksi panas dan sumber panas (q). Karena pada penelitian ini tidak terdapat sumber panas pada volume kendali maka $q = 0$. Sehingga akan diturunkan konduksi panas yang terjadi pada volume kendali sebagai berikut. Misalkan k adalah notasi untuk *heat flux* yang terjadi pada volume kendali, maka komponen *heat flux* dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4.4 Komponen *Heat Flux* pada Volume Kendali

Laju netto dari penerusan panas suatu partikel fluida dapat dihitung dari perbedaan kalor yang masuk dengan kalor yang keluar pada arah- x , arah- y dan arah- z didefinisikan sebagai berikut

Ke arah sumbu- x :

$$\left[k_x - \frac{\partial(k_x)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[k_x + \frac{\partial(k_x)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z = - \frac{\partial(k_x)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

Ke arah sumbu- y :

$$\left[k_y - \frac{\partial(k_y)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z - \left[k_y + \frac{\partial(k_y)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z = - \frac{\partial(k_y)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$$

Ke arah sumbu- z :

$$\left[k_z - \frac{\partial(k_z)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y - \left[k_z + \frac{\partial(k_z)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y = - \frac{\partial(k_z)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$$

Sehingga total laju netto pertambahan energi dari kalor ke dalam sistem adalah

$$\left(- \frac{\partial(k_x)}{\partial x} - \frac{\partial(k_y)}{\partial y} - \frac{\partial(k_z)}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (4.45)$$

Pada penelitian ini diasumsikan bahwa aliran fluida yang dianalisa adalah aliran dua dimensi, sehingga Persamaan (4.45) dapat ditulis dengan

$$\left(- \frac{\partial(k_x)}{\partial x} - \frac{\partial(k_y)}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta z = (-\nabla \cdot \mathbf{k}) \delta x \delta y \delta z \quad (4.46)$$

Perpindahan panas dengan konduksi yang berkaitan dengan gradien temperatur didefinisikan oleh hukum Fourier sebagai berikut.

$$k_x = -c \frac{\partial T}{\partial x} ; k_y = -c \frac{\partial T}{\partial y}$$

atau dapat ditulis

$$\mathbf{k} = -c \nabla T \quad (4.47)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.47) ke Persamaan (4.46) diperoleh

$$(-\nabla \cdot \mathbf{k}) \delta x \delta y \delta z = \nabla \cdot (c \nabla T) \delta x \delta y \delta z$$

Sehingga Persamaan (4.44) menjadi

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \mathbf{u}) \right) \delta x \delta y \delta z = \nabla \cdot (c \nabla T) \delta x \delta y \delta z \quad (4.48)$$

Apabila pada kedua ruas Persamaan (4.48) dibagi oleh $\delta x \delta y \delta z$ diperoleh

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \mathbf{u}) \right) = \nabla \cdot (c \nabla T) \quad (4.49)$$

Menurut Lienhard (2002) pengaruh dari tekanan dan perubahan kerapatan dapat diabaikan karena dalam sistem tekanan konstan (tetap), sehingga perubahan dari energi dapat didekati dengan perubahan entalpi sebagai berikut.

$$\partial e = \partial h - \partial \left(\frac{P}{\rho} \right) \approx \partial h$$

Dengan mensubstitusikan $\partial h \approx C_p \partial T$ ke Persamaan (4.49) diperoleh

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T \mathbf{u}) \right) = \nabla \cdot (c \nabla T) \quad (4.50)$$

dengan

$$\nabla \cdot (T \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\nabla T) + T (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

Selanjutnya sesuai dengan persamaan kontinuitas, maka

$$\nabla \cdot (T \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\nabla T) \quad (4.51)$$

Substitusi Persamaan (4.51) ke Persamaan (4.50), sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla T) \right) = \nabla \cdot (c \nabla T) \quad (4.52)$$

dengan

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\nabla T) &= (\hat{i}u + \hat{j}v) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot (\nabla T) &= \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (c\nabla T) &= c\nabla \cdot (\nabla T) \\ \Leftrightarrow \nabla \cdot (c\nabla T) &= c\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\end{aligned}$$

Maka Persamaan (4.52) menjadi

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = c \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

4.2 Penurunan Persamaan Pembangun

Persamaan pembangun yang digunakan pada aliran fluida yang bersifat *unsteady* dan *incompressible* adalah sebagai berikut.

a. Persamaan Kontinuitas

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

atau dapat ditulis

$$\frac{\partial \bar{r}u}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{r}v}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.53)$$

b. Persamaan Momentum

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \cdot \mathbf{u} + (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g} - \\ &\sigma(b + B_0)^2 \mathbf{u} - \frac{\mu}{K^*} \mathbf{u}\end{aligned} \quad (4.54)$$

c. Persamaan Energi

$$\rho C_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = c \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.55)$$

4.2.1 Persamaan Momentum

Aliran fluida kental yang melewati permukaan bola teriris terjadi pada arah sumbu- x dan arah sumbu- y , sehingga dapat dikonstruksi persamaan momentum ke arah sumbu- x dan ke arah sumbu- y . Pada persamaan momentum (4.54) terdapat komponen dalam notasi vektor. Jika persamaan momentum tersebut dijabarkan, diperoleh persamaan sebagai berikut.

Ruas kiri dari Persamaan (4.54) yang berupa $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{t}}$ adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} \hat{i} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} \hat{j}\end{aligned}$$

a. Ruas kiri dari persamaan (4.54) yang berupa $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ adalah

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= \left((\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\hat{j} \right) \right) (\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \\ \Leftrightarrow (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= \left(\bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right) (\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \\ \Leftrightarrow (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \hat{i} + \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \hat{j}\end{aligned}$$

b. Ruas kanan dari Persamaan (4.54) yang berupa ∇p adalah

$$\nabla p = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\hat{j} \right) p = \frac{\partial p}{\partial \bar{x}}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial \bar{y}}\hat{j}$$

c. Ruas kanan dari Persamaan (4.54) yang berupa $\mu \nabla^2 \cdot \mathbf{u}$ adalah

$$\begin{aligned}\mu \nabla^2 \cdot \mathbf{u} &= \mu \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\hat{j} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\hat{j} \right) \cdot (\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \\ \Leftrightarrow \mu \nabla^2 \cdot \mathbf{u} &= \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\hat{i} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}\hat{j} \right) \cdot (\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \\ \Leftrightarrow \mu \nabla^2 \cdot \mathbf{u} &= \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \hat{i} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \hat{j}\end{aligned}$$

d. Ruas kanan dari Persamaan (4.54) yang berupa $\sigma(b + B_0)^2 \mathbf{u}$ adalah

$$\sigma \beta_0^2 \mathbf{u} = \sigma(b + B_0)^2 (\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) = \sigma(b + B_0)^2 \bar{u}\hat{i} + \sigma(b + B_0)^2 \bar{v}\hat{j}$$

d. Ruas kanan dari Persamaan (4.54) yang berupa $-\frac{\mu}{K^*} \mathbf{u}$ adalah

$$\frac{\mu}{K^*} \mathbf{u} = \frac{\mu}{K^*} (\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) = \frac{\mu}{K^*} \bar{u}\hat{i} + \frac{\mu}{K^*} \bar{v}\hat{j}$$

Dengan mengelompokkan vektor \hat{i} untuk sumbu-x dan \hat{j} untuk sumbu-y, didapatkan persamaan momentum sumbu-x yaitu

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + (\rho - \rho_\infty) g_{\bar{x}} - \\ &\quad \sigma(b + B_0)^2 \bar{u} - \frac{\mu}{K^*} \bar{u}\end{aligned}\tag{4.56}$$

dan untuk persamaan momentum di sumbu-y yaitu

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + (\rho - \rho_\infty) g_{\bar{y}} - \\ &\quad \sigma(b + B_0)^2 \bar{v} - \frac{\mu}{K^*} \bar{v}\end{aligned}\tag{4.57}$$

Sesuai dengan pendekatan Boussineq yaitu semua variabel yang berpengaruh dalam Persamaan Momentum (4.56) dan (4.57) diabaikan, kecuali kerapatan. Pendekatan Boussineq ini diterapkan pada Persamaan (4.56) dan (4.57) untuk mendekati perbedaan kerapatan yang menyebabkan adanya aliran sebagai akibat dari interaksi antara gaya gravitasi dan tekanan hidrostatik seperti pengaruh temperatur.

Menurut Leal (1992), diasumsikan bahwa nilai maksimum $(\bar{T} - T_\infty)$ kecil sehingga berdasarkan definisi pendekatan Deret Taylor yaitu

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = 1 + \beta(\bar{T} - T_\infty) + O(\bar{T} - T_\infty)^2 \quad (4.58)$$

Dengan menghilangkan bagian yang berorder tinggi, maka persamaan (4.58) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\infty}{\rho} &= 1 + \beta(\bar{T} - T_\infty) \\ \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} &= \beta(\bar{T} - T_\infty) \end{aligned} \quad (4.59)$$

dengan β adalah koefisien ekspansi panas yang dinyatakan dengan

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{T}} \right)_p$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan (4.59) ke Persamaan (4.58) maka diperoleh persamaan momentum sumbu-x:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{x}} - \sigma (b + B_0)^2 \bar{u} \\ &\quad - \frac{\mu}{K^*} \bar{u} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Dan persamaan sumbu-y:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial \bar{y}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{y}} - \sigma (b + B_0)^2 \bar{v} \\ &\quad - \frac{\mu}{K^*} \bar{v} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Pada penelitian ini menggunakan kondisi batas yaitu

$$\begin{aligned} \bar{t} < 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_\infty \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y} \\ \bar{t} \geq 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_w \text{ pada saat } \bar{y} = 0 \\ \bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{T} = T_\infty \text{ saat } \bar{y} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.62)$$

4.2.2 Transformasi Variabel Tak-berdimensi

Persamaan pembangun dimensional yang telah diperoleh diubah ke dalam persamaan tak berdimensi dengan dilakukan transformasi variabel tak berdimensi. Pada permasalahan ini variabel tak berdimensi yang digunakan sebagai berikut (Mohammad, 2014):

$$\begin{aligned} x = \frac{\bar{x}}{a}, y = Re^{1/2}, r = \frac{\bar{r}}{a}, b = \frac{\bar{b}}{a}, u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, v = Re^{1/2} \frac{\bar{v}}{U_\infty} \\ t = \frac{U_\infty \bar{t}}{U_\infty}, p = \frac{\bar{p}}{\rho U_\infty^2}, T = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_w - T_\infty} \end{aligned}$$

dengan $Re = \frac{U_\infty a}{\nu}$, dan ν adalah viskositas kinematik yang dapat dituliskan sebagai $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Selanjutnya dilakukan substitusi variabel-variabel tak berdimensi di atas ke dalam persamaan pembangun yang telah didapatkan pada subbab 4.1 dan didefinisikan $M = \frac{a\sigma B_0^2}{\rho U_\infty}$ kemudian diasumsikan bahwa besar medan magnet menginduksi fluida yang mengalir melalui bola berpori bermagnet adalah $\frac{1}{4}$ dari besar medan magnet dari sumber yaitu bola berpori bermagnet. sehingga diperoleh:

a. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.63)$$

b. Persamaan momentum sumbu - x :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha T - \left(\frac{25}{16} M + \phi\right) u \quad (4.64)$$

c. Persamaan momentum sumbu - y :

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\alpha T}{Re^{1/2}} - \left(\frac{25}{16} \frac{(M+\phi)}{Re}\right) v \quad (4.65)$$

d. Persamaan energi:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.66)$$

dengan M, α, Gr, Pr , dan ϕ adalah parameter tak berdimensi. Parameter-parameter tersebut didefinisikan sebagai berikut.

$$M = \frac{a\sigma B_0^2}{\rho U_\infty} \quad (\text{Parameter Magnetik})$$

$$\alpha = \frac{Gr}{Re} \quad (\text{Parameter Konveksi})$$

$$Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{\nu^2} \quad (\text{Parameter Grashof})$$

$$Pr = \frac{\nu \rho C_p}{c} \quad (\text{Bilangan Prandtl})$$

$$\phi = \frac{a\mu}{\rho U_\infty K^*} \quad (\text{Parameter Porositas})$$

Berdasarkan variabel-variabel tak berdimensi di atas, maka kondisi batas diberikan :

$$\left. \begin{aligned} t < 0 : u = v = 0, T = 0 \text{ untuk setiap } x, y \\ t \geq 0 : u = v = 0, T = 1 \text{ ketika } y = 0 \\ u = u_e(x), T = 0 \text{ ketika } y \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (4.67)$$

4.2.3 Pendekatan Lapisan Batas

Pendekatan lapisan batas dimana bilangan Reynolds $Re \rightarrow \infty$ sehingga $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$, maka diperoleh:

a. Persamaan Kontinuitas :

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.68)$$

b. Persamaan Momentum Sumbu- x :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \alpha T - \left(\frac{25}{16}M + \phi\right)u \quad (4.69)$$

c. Persamaan Momentum Sumbu- y :

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.70)$$

d. Persamaan Energi:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.71)$$

Dari persamaan momentum sumbu- y , tekanan dari aliran p bebas dari y karena aliran yang diselesaikan adalah aliran dua dimensi, menunjukkan bahwa tekanan dari aliran p bergantung atau variasinya hanya pada x . Dengan demikian, hanya ada persamaan satu momentum yang tersisa di sistem, yaitu pada sumbu- x . Evaluasi persamaan pada luar lapisan batas:

$$\left(\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} - \alpha T - \left(\frac{25}{16}M + \phi\right)u_e \quad (4.72)$$

Dengan menggunakan kecepatan aliran bebas $u_e = \frac{3}{2} \sin x$, maka diperoleh:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_e}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial u_e}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

Substitusi Persamaan (4.72) ke Persamaan (4.73) sehingga dapat diperoleh

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \alpha T - \left(\frac{25}{16}M + \phi\right)u_e \quad (4.74)$$

dan ketika $T = 0$ maka Persamaan (4.74) berubah menjadi

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \left(\frac{25}{16}M + \phi\right)u_e \quad (4.75)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan (4.75) ke Persamaan (4.72) sehingga dapat diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha T - \left(\frac{25}{16} M + \phi \right) (u - u_e) \quad (4.76)$$

4.2.4 Fungsi Alir (*Stream Function*)

Pada penelitian ini menggunakan penampang dua dimensi yaitu u dan v yang alirannya berada pada bidang x dan y . Agar dua fungsi kecepatan tersebut saling terhubung maka dikenalkan sebuah fungsi arus atau fungsi alir. Dengan adanya fungsi alir akan menyederhanakan banyaknya persamaan dan membuat komputasi dalam bentuk satu variabel. Fungsi alir didefinisikan sebagai berikut:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.77)$$

Substitusi Persamaan (4.77) ke masing-masing Persamaan (4.68), (4.71), dan (4.76) diperoleh

a. Persamaan Kontinuitas:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (4.78)$$

b. Persamaan Momentum:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \alpha T - \\ \left(\frac{25}{16} M + \phi \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

c. Persamaan Energi:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.80)$$

Kondisi batas pada (4.77) dapat dituliskan dalam bentuk fungsi alir sebagai berikut.

$$t < 0 : \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = T = 0 \text{ untuk setiap } x, y$$

$$t \geq 0 : \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, T = 1 \text{ ketika } y = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e(x), T = 0 \text{ ketika } y \rightarrow \infty$$

4.2.5 Persamaan Similaritas

Hasil fungsi alir dari Persamaan Momentum (4.79) dan Persamaan Energi (4.80) ditransformasikan ke dalam bentuk variabel similaritas yang terdiri dari dua tipe waktu, yaitu *small time* dan *large time*.

Persamaan dengan variabel similaritas untuk *small time* ($t \leq t^*$) dengan t^* sebarang nilai, yaitu

$$\psi = t^{1/2}u_e(x)r(x)f(x,\eta,t), \quad T = s(x,\eta,t), \quad \eta = \frac{y}{t^{1/2}} \quad (4.81)$$

Dengan penerapan Persamaan (4.81) pada masing-masing Persamaan (4.79) dan Persamaan (4.80) maka dapat diperoleh

a. Persamaan Momentum:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta \partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] &= t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + \\ t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) - \alpha t s - \left(\frac{25}{16} M + \phi \right) t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) & \quad (4.82) \end{aligned}$$

b. Persamaan Energi:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{\text{Pr} \eta \partial s}{2 \partial \eta} + \text{Pr} t \frac{\partial u_e}{\partial x} f \frac{\partial s}{\partial \eta} = \text{Pr} t \left[\frac{\partial s}{\partial t} + u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} f \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \right] \quad (4.83)$$

dengan kondisi batas, yaitu

$$\begin{aligned} t < 0 : f &= \frac{\partial f}{\partial \eta} = s = 0 \text{ untuk setiap } x, \eta \\ t \geq 0 : f &= \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 1 \text{ ketika } \eta = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= u_e(x), s = 0 \text{ ketika } \eta \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Sedangkan persamaan dengan variabel similaritas untuk *large time* ($t > t^*$) dengan t^* sebarang nilai, yaitu

$$\Psi = u_e(x)r(x)F(x,Y,t), \quad T = S(x,Y,t), \quad Y = y \quad (4.84)$$

dengan penerapan Persamaan (4.84) pada masing-masing Persamaan (4.79) Persamaan (4.80) maka dapat diperoleh

a. Persamaan Momentum:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} + u_e \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) - \alpha S - \left(\frac{25}{16} M + \phi \right) \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) \quad (4.85)$$

b. Persamaan Energi:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + \text{Pr} \frac{\partial u_e}{\partial x} F \frac{\partial S}{\partial Y} = \text{Pr} \left[\frac{\partial S}{\partial t} + u_e \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial S}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} F \frac{\partial S}{\partial Y} \right) \right] \quad (4.86)$$

dengan kondisi batas, yaitu

$$F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 1 \text{ ketika } Y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = 1, S = 0 \text{ ketika } Y \rightarrow \infty$$

Pada penelitian ini difokuskan pada bagian titik stagnasi ($x \approx 0$). Dengan demikian, nilai $u_e(x) = 0$ dan $\frac{\partial u_e}{\partial x} = \frac{3}{2}$. Sehingga Persamaan Momentum (4.82) dan Persamaan Energi (4.83) untuk *small time* ($t \leq t^*$) masing-masing adalah

a. Persamaan Momentum:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta \partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + t \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} - \alpha t s - \left(\frac{25}{16} M + \phi \right) t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \quad (4.87)$$

b. Persamaan Energi:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{\text{Pr} \eta \partial s}{2 \partial \eta} + \frac{3}{2} \text{Pr} t f \frac{\partial s}{\partial \eta} = \text{Pr} t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.88)$$

dengan kondisi batas, yaitu

$$t < 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = s = 0 \text{ untuk setiap } x, \eta$$

$$t \geq 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 1 \text{ ketika } \eta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = u_e(x), s = 0 \text{ ketika } \eta \rightarrow \infty$$

Sedangkan Persamaan Momentum (4.85) dan Persamaan Energi (4.86) untuk *large time* ($t > t^*$) menjadi

a. Persamaan Momentum:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} - \alpha S - \left(\frac{25}{16} M + \phi \right) \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) \quad (4.89)$$

b. Persamaan Energi:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + \frac{3}{2} \text{Pr} F \frac{\partial S}{\partial Y} = \text{Pr} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.90)$$

dengan kondisi batas, yaitu

$$F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 1 \text{ ketika } Y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = 1, S = 0 \text{ ketika } Y \rightarrow \infty$$

Pada penelitian ini menggunakan konveksi paksa sehingga nilai parameter konveksi (α) = 0, maka Persamaan Momentum (4.87) dan Persamaan Energi (4.88) untuk *small time* ($t \leq t^*$) masing-masing adalah

a. Persamaan Momentum:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta \partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + t \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} - \left(\frac{25}{16} M + \phi \right) t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \quad (4.91)$$

b. Persamaan Energi:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \frac{\text{Pr} \eta \partial s}{2 \partial \eta} + \frac{3}{2} \text{Pr} t f \frac{\partial s}{\partial \eta} = \text{Pr} t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.92)$$

dengan kondisi batas, yaitu

$$t < 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = s = 0 \text{ untuk setiap } x, \eta$$

$$t \geq 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 1 \text{ ketika } \eta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, s = 0 \text{ ketika } \eta \rightarrow \infty$$

Sedangkan Persamaan Momentum (4.89) dan Persamaan Energi (4.90) untuk *large time* ($t > t^*$) menjadi

a. Persamaan Momentum:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} - \left(\frac{25}{16} M + \phi \right) \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) \quad (4.93)$$

b. Persamaan Energi:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + \frac{3}{2} \text{Pr} F \frac{\partial S}{\partial Y} = \text{Pr} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.94)$$

dengan kondisi batas, yaitu

$$F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 1 \text{ ketika } Y = 0$$

dan

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = 1, S = 0 \text{ ketika } Y \rightarrow \infty$$

Misalkan $\frac{\partial f}{\partial \eta} = f'$ dan $\frac{\partial s}{\partial \eta} = s'$ maka Persamaan Momentum (4.91) dan Persamaan Energi (4.92) masing-masing adalah

a. Persamaan Momentum:

$$f''' + \frac{\eta}{2}f'' + \frac{3}{2}t[1 - (f')^2 + ff''] = t \frac{\partial f'}{\partial t} - \left(\frac{25}{16}M + \phi\right)t(1 - f') \quad (4.95)$$

b. Persamaan Energi:

$$s'' + \frac{\text{Pr}\eta}{2}s' + \frac{3}{2}\text{Pr}tf s' = \text{Pr}t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.96)$$

dengan kondisi batas, yaitu

$$t < 0 : f' = s = 0 \text{ untuk setiap } x, \eta$$

$$t \geq 0 : f = f' = 0, s = 1 \text{ ketika } \eta = 0$$

$$f' = 1, s = 0 \text{ ketika } \eta \rightarrow \infty \quad (4.97)$$

Misalkan $\frac{\partial F}{\partial Y} = F'$ dan $\frac{\partial S}{\partial Y} = S'$ maka Persamaan Energi (4.93) dan Persamaan Momentum (4.94) masing-masing adalah

a. Persamaan Momentum:

$$F''' + \frac{3}{2}[1 - (F')^2 + FF''] = \frac{\partial F'}{\partial t} - \left(\frac{25}{16}M + \phi\right)(1 - F') \quad (4.98)$$

b. Persamaan Energi:

$$S'' + \frac{3}{2}\text{Pr}FS' = \text{Pr} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.99)$$

dengan kondisi batas, yaitu

$$F = F' = 0, S = 1 \text{ ketika } Y = 0$$

$$F' = 1, S = 0 \text{ ketika } Y \rightarrow \infty \quad (4.100)$$

Dengan mensubstitusikan $t = 0$ ke dalam persamaan (4.95) dan persamaan (4.96), kemudian diintegrasikan dengan menggunakan kondisi batas pada persamaan (4.97), dapat diperoleh kondisi awal untuk fungsi f, f', f'', s , dan s' sebagai berikut

a. Kondisi awal persamaan momentum

$$f = \eta \mathbf{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta^2}{4}} - 1 \right)$$

$$f' = \mathbf{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

$$f'' = \frac{e^{-\frac{\eta^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}$$

b. Kondisi awal persamaan energi

$$s = -\mathbf{erf}\left(\frac{\eta\sqrt{\text{Pr}}}{2}\right) + 1$$

$$s' = -\sqrt{\frac{\text{Pr}}{\pi}} e^{-\frac{\text{Pr}\eta^2}{4}}$$

BAB V

PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA

Bab ini menjelaskan penyelesaian secara numerik model matematika konveksi paksa dari aliran fluida kental magnetohidrodinamik tak tunak yang melewati bola berpori yang diperoleh dari Bab IV dengan skema Keller-Box. Langkah pertama dari skema Keller-box adalah memisalkan persamaan berorde tinggi menjadi persamaan orde pertama, langkah kedua dilakukan diskritisasi, langkah ketiga linearisasi dengan metode Newton, dan langkah terakhir adalah menyelesaikan hasil linearisasi dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal. Hasil simulasi yang diperoleh adalah representasi dari karakteristik aliran fluida, yaitu kurva kecepatan dan temperatur terhadap parameter magnetik (M), bilangan Prandtl (Pr), konveksi paksa (α), parameter porositas (ϕ) dan parameter permeabilitas (K^*).

5.1 Penyelarasan Notasi

Persamaan (4.91), (4.92), (4.93), dan (4.94) merupakan persamaan orde tinggi. Pada penyelesaian numerik menggunakan metode Keller-Box haruslah persamaan dalam bentuk orde pertama, maka dilakukan pemisalan fungsi sebagai berikut.

1. *Small time*

Misalkan

$$f' = u \quad (5.1)$$

$$u' = v \quad (5.2)$$

$$s' = q \quad (5.3)$$

maka Persamaan Momentum (4.91) dan Persamaan Energi (4.92) masing-masing adalah

a. Persamaan Momentum:

$$v' + \frac{\eta}{2}v + \frac{3}{2}t[1 - u^2 + fv] + \left(\frac{25}{16}M + \phi\right)t(1 - u) = t\frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.4)$$

b. Persamaan Energi:

$$q' + \frac{Pr\eta}{2}q + \frac{3}{2}Prtfq = Prt\frac{\partial s}{\partial t} \quad (5.5)$$

2. Large Time

Misalkan

$$F' = U \quad (5.6)$$

$$U' = V \quad (5.7)$$

$$S' = Q \quad (5.8)$$

maka Persamaan Momentum (4.93) dan Persamaan Energi (4.94) masing-masing adalah

a. Persamaan Momentum:

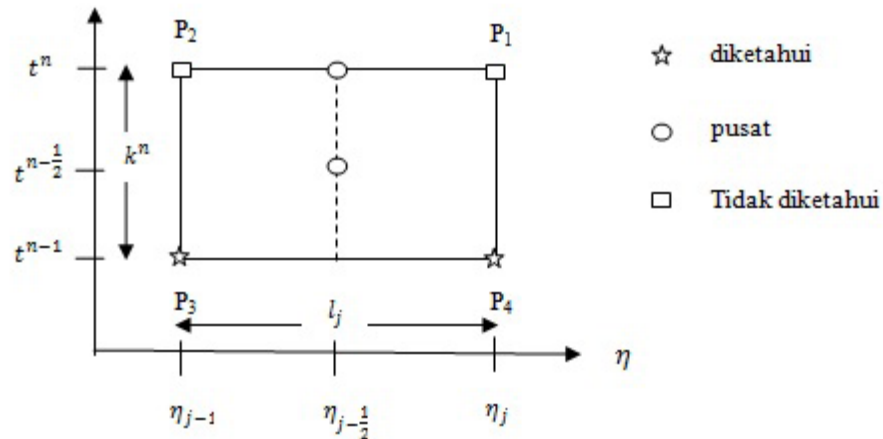
$$V' + \frac{3}{2}[1 - U^2 + FV] + \left(\frac{25}{16}M + \phi\right)(1 - U) = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (5.9)$$

b. Persamaan Energi:

$$Q' + \frac{3}{2}\text{Pr}FQ = \text{Pr}\frac{\partial S}{\partial t} \quad (5.10)$$

5.2 Diskritisasi Model

Setelah dilakukan pemisalan fungsi, selanjutnya dilakukan diskritisasi model dengan menggunakan metode beda hingga sesuai dengan Gambar 5.1



Gambar 5.1 Skema Beda Hingga Keller-box

Pada Persamaan (5.1)-(5.3) dan Persamaan (5.6)-(5.8) menggunakan titik tengah $(\eta_{j-1/2}, t^n)$ pada ruas P_1P_2 dengan menggunakan beda hingga pusat, sedangkan untuk bentuk tak linier pada Persamaan (5.4), (5.5), (5.9), dan (5.10) digunakan titik tengah $(\eta_{j-1/2}, t^{n-1/2})$ pada segiempat $P_1P_2P_3P_4$ sehingga didapatkan sebagai berikut.

1. Small time

Hasil diskritisasi Persamaan (5.1)-(5.3) menggunakan titik tengah $\left(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n\right)$ pada ruas P_1P_2 dan Persamaan (5.4), (5.5) dengan menggunakan titik tengah $\left(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}}\right)$ pada segiempat $P_1P_2P_3P_4$ adalah

$$\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{l_j} = u_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.11)$$

$$\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{l_j} = v_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.12)$$

$$\frac{(s_j^n - s_{j-1}^n)}{l_j} = q_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.13)$$

a. Persamaan Momentum:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2} t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \left(\frac{25}{16} M + \phi \right) t^n \left(1 - \right. \\ & \left. u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n = - \left(\frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2} t^{n-1} \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + \right. \\ & \left. f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \left(\frac{25}{16} M + \phi \right) t^{n-1} \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.14)$$

b. Persamaan Energi:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + \text{Pr} \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2} \text{Pr} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n = - \left(\frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \\ & \text{Pr} \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2} \text{Pr} t^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

2. Large time

Hasil diskritisasi Persamaan (5.6)-(5.8) menggunakan titik tengah $\left(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n\right)$ pada ruas P_1P_2 dan Persamaan (5.9), (5.10) dengan menggunakan titik tengah $\left(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}}\right)$ pada segiempat $P_1P_2P_3P_4$ adalah

$$\frac{(F_j^n - F_{j-1}^n)}{l_j} = U_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.16)$$

$$\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{l_j} = V_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.17)$$

$$\frac{(s_j^n - s_{j-1}^n)}{l_j} = Q_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.18)$$

a. Persamaan Momentum:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{3}{2} \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \left(\frac{25}{16} M + \phi \right) \left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \\ & 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^n = - \left(\frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{3}{2} \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - \left(\frac{25}{16} M + \phi \right) \left(1 - \right. \\ & \left. U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.19)$$

b. Persamaan Energi:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{3}{2} \text{Pr} F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^n = - \left(\frac{Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{3}{2} \text{Pr} F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \\ & 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.20)$$

dengan l_j adalah step size untuk η , sedangkan k^n step size dari waktu.

5.3 Pelinieran Model

Setelah didapatkan hasil diskritisasi model, selanjutnya dilakukan linearisasi model pada Persamaan (5.11)-(5.20) dengan menggunakan metode Newton (Mohammad, 2014). Sebelumnya dikenalkan bentuk iterasi untuk metode Newton sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\ u_j^{(i+1)} &= u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)} \\ v_j^{(i+1)} &= v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)} \\ s_j^{(i+1)} &= s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} \\ q_j^{(i+1)} &= q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Selanjutnya disubstitusikan bentuk iterasi (5.21) pada sistem Persamaan (5.11)-(5.20), secara sederhana dengan menghilangkan orde tinggi pada $(\delta f_j^{(i)}, \delta u_j^{(i)}, \delta v_j^{(i)}, \delta s_j^{(i)}, \delta q_j^{(i)})$ sehingga diperoleh

1. *Small time*

Persamaan (5.11)-(5.13) hasil linearisasinya adalah sebagai berikut.

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j - \delta u_{j-1}) = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (5.22)$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_j - \delta v_{j-1}) = -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(v_j^n - v_{j-1}^n) \quad (5.23)$$

$$(\delta s_j - \delta s_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) = -(s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n - q_{j-1}^n) \quad (5.24)$$

dengan melakukan pemisalan pada Persamaan (5.22)-(5.24) yaitu

$$(r_1)_j = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

$$(r_2)_j = -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(v_j^n - v_{j-1}^n)$$

$$(r_3)_j = -(s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n - q_{j-1}^n)$$

Sehingga bentuk Persamaan (5.22)-(5.24) menjadi

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j - \delta u_{j-1}) = (r_1)_j \quad (5.25)$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_j - \delta v_{j-1}) = (r_2)_j \quad (5.26)$$

$$(\delta s_j - \delta s_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_j - \delta q_{j-1}) = (r_3)_j \quad (5.27)$$

Selanjutnya dilakukan pemisalan berdasarkan hasil perhitungan dari Persamaan (5.14)

dan (5.15) yang dapat dilihat pada lampiran 7 sebagai berikut

$$\begin{aligned} (r_4)_j = & -\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{3}{2} t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \left(\frac{25}{16} M + \right. \\ & \left. \phi \right) t^n \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2} t^{n-1} \left(1 - \right. \\ & \left. \left(u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \right) - \left(\frac{25}{16} M + \phi \right) t^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} (r_5)_j = & -\frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2} \text{Pr} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n - \\ & \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{3}{2} \text{Pr} t^{n-1} \left(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.29)$$

dengan

$$\begin{aligned}
(a_1)_j &= \frac{3}{4} t^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_2)_j &= (a_1)_j \\
(a_3)_j &= -\frac{3}{2} t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{\left(\frac{25}{16} M + \phi\right)}{2} t^n - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(a_4)_j &= (a_3)_j \\
(a_5)_j &= \frac{1}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_6)_j &= -\frac{1}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_1)_j &= \frac{1}{l_j} + \text{Pr} \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4} \text{Pr} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_2)_j &= -\frac{1}{l_j} + \text{Pr} \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{3}{4} \text{Pr} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_3)_j &= \frac{3}{4} \text{Pr} t^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_4)_j &= (b_3)_j \\
(b_5)_j &= \text{Pr} \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(b_6)_j &= (b_5)_j
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Kemudian disubstitusikan Persamaan (5.30) ke Persamaan (5.28) dan (5.29) sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
&(a_1)_j \delta f_j + (a_2)_j \delta f_{j-1} + (a_3)_j \delta u_j + (a_4)_j \delta u_{j-1} + (a_5)_j \delta v_j + (a_6)_j \delta v_{j-1} \\
&= (r_4)_j
\end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}
&(b_1)_j \delta q_j + (b_2)_j \delta q_{j-1} + (b_3)_j \delta f_j + (b_4)_j \delta f_{j-1} + (b_5)_j \delta s_j + (b_6)_j \delta s_{j-1} \\
&= (r_5)_j
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Berdasarkan kondisi batas pada (4.88) maka dapat dinyatakan bahwa $\delta f_0 = 0$, $\delta u_0 = 0$, $\delta s_0 = 0$, $\delta u_N = 0$, $\delta s_N = 0$.

2. Large time

Persamaan (5.16)-(5.18) hasil linearisasinya adalah sebagai berikut.

$$(\delta F_j - \delta F_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta U_j - \delta U_{j-1}) = -(F_j^n - F_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(U_j^n - U_{j-1}^n) \quad (5.33)$$

$$(\delta U_j - \delta U_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta V_j - \delta V_{j-1}) = -(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(V_j^n - V_{j-1}^n) \quad (5.34)$$

$$(\delta S_j - \delta S_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta Q_j - \delta Q_{j-1}) = -(S_j^n - S_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(Q_j^n - Q_{j-1}^n) \quad (5.35)$$

dengan melakukan pemisalan pada Persamaan (5.33)-(5.35) yaitu

$$(r_1)_j = -(F_j^n - F_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(U_j^n - U_{j-1}^n)$$

$$(r_2)_j = -(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(V_j^n - V_{j-1}^n)$$

$$(r_3)_j = -(S_j^n - S_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(Q_j^n - Q_{j-1}^n)$$

Sehingga bentuk Persamaan (5.33)-(5.35) menjadi

$$(\delta F_j - \delta F_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta U_j - \delta U_{j-1}) = (r_1)_j \quad (5.36)$$

$$(\delta U_j - \delta U_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta V_j - \delta V_{j-1}) = (r_2)_j \quad (5.37)$$

$$(\delta S_j - \delta S_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta Q_j - \delta Q_{j-1}) = (r_3)_j \quad (5.38)$$

Selanjutnya dilakukan pemisalan berdasarkan hasil perhitungan dari Persamaan (5.19)

dan (5.20) yang dapat dilihat pada lampiran 7 sebagai berikut

$$\begin{aligned} (r_4)_j = & -\frac{(V_j^n - V_{j-1}^n)}{l_j} - \frac{3}{2} \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^n \right)^2 + \left(F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \right) - \left(\frac{25}{16} M + \phi \right) \left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^n \right) + \\ & 2 \frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{(V_j^{n-1} - V_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{3}{2} \left(1 - \left(U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right)^2 + \left(F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \right) - \left(\frac{25}{16} M + \right. \\ & \left. \phi \right) \left(1 - U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) - 2 \frac{t^{\frac{n-1}{2}}}{k^n} U_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} (r_5)_j = & -\frac{(Q_j^n - Q_{j-1}^n)}{l_j} - \frac{3}{2} \text{Pr} t^n \left(F_{j-\frac{1}{2}}^n Q_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - 2 \frac{\text{Pr} t^{\frac{n-1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{(Q_j^{n-1} - Q_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \\ & \frac{3}{2} \text{Pr} F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{\text{Pr} t^{\frac{n-1}{2}}}{k^n} S_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned}
(a_1)_j &= \frac{3}{4} V_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_2)_j &= (a_1)_j \\
(a_3)_j &= -\frac{3}{2} U_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{\left(\frac{25}{16}M+\phi\right)}{2} - \frac{1}{k^n} \\
(a_4)_j &= (a_3)_j \\
(a_5)_j &= \frac{1}{l_j} + \frac{3}{4} F_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(a_6)_j &= -\frac{1}{l_j} + \frac{3}{4} F_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_1)_j &= \frac{1}{l_j} + \frac{3}{4} \text{Pr} F_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_2)_j &= -\frac{1}{l_j} + \frac{3}{4} \text{Pr} F_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_3)_j &= \frac{3}{4} \text{Pr} Q_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(b_4)_j &= (b_3)_j \\
(b_5)_j &= \frac{\text{Pr}}{k^n} \\
(b_6)_j &= (b_5)_j
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Kemudian disubstitusikan Persamaan (5.41) ke Persamaan (5.39) dan (5.40) sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
&(a_1)_j \delta F_j + (a_2)_j \delta F_{j-1} + (a_3)_j \delta U_j + (a_4)_j \delta U_{j-1} + (a_5)_j \delta V_j + (a_6)_j \delta V_{j-1} \\
&= (r_4)_j
\end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned}
&(b_1)_j \delta Q_j + (b_2)_j \delta Q_{j-1} + (b_3)_j \delta F_j + (b_4)_j \delta F_{j-1} + (b_5)_j \delta S_j + (b_6)_j \delta S_{j-1} \\
&= (r_5)_j
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Berdasarkan kondisi batas pada (4.88) maka dapat dinyatakan bahwa $\delta F_0 = 0, \delta U_0 = 0, \delta S_0 = 0, \delta U_N = 0, \delta S_N = 0$.

5.4 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

Sistem linier pada Persamaan (5.25)-(5.27), (5.31)-(5.32), (5.36)-(5.38), dan (5.42)-(5.43) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok (Mohammad, 2014). Struktur diagonal blok biasanya terdiri dari elemen-elemen yang berupa variabel atau konstanta, sedangkan pada metode Keller-Box ini elemen-elemen

dari blok tridiagonal berupa matriks blok, oleh karena itu terlebih dahulu dibutuhkan penentuan elemen-elemen dari matriks blok tridiagonal dari sistem linier Persamaan (5.25)-(5.27) dan (5.31)-(5.32) dengan cara dibentuk tiga keadaan yaitu saat $j = 1$, $j = N - 1$, dan $j = N$.

1. Saat $j = 1$, maka Persamaan (5.25)-(5.27) dan (5.31)-(5.32) menjadi

$$(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{l_j}{2}(\delta u_1 - \delta u_0) = (r_1)_1$$

$$(\delta u_1 - \delta u_0) - \frac{l_j}{2}(\delta v_1 - \delta v_0) = (r_2)_1$$

$$(\delta s_1 - \delta s_0) - \frac{l_j}{2}(\delta q_1 - \delta q_0) = (r_3)_1$$

$$(a_1)_1 \delta f_1 + (a_2)_1 \delta f_0 + (a_3)_1 \delta u_1 + (a_4)_1 \delta u_0 + (a_5)_1 \delta v_1 + (a_6)_1 \delta v_0 = (r_4)_1$$

$$(b_1)_1 \delta q_1 + (b_2)_1 \delta q_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_4)_1 \delta f_0 + (b_5)_1 \delta s_1 + (b_6)_1 \delta s_0 = (r_5)_1$$

Berdasarkan kondisi batas $\delta f_0 = 0$, $\delta u_0 = 0$, $\delta s_0 = 0$ maka sistem persamaan diatas dapat dibentuk dalam matriks berikut

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} \\ (a_6)_1 & 0 & (a_1)_1 & (a_5)_1 & 0 \\ 0 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & 0 & (b_1)_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_0 \\ \delta q_0 \\ \delta f_1 \\ \delta v_1 \\ \delta q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_5)_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta s_1 \\ \delta f_2 \\ \delta v_2 \\ \delta q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_1 \\ (r_2)_1 \\ (r_3)_1 \\ (r_4)_1 \\ (r_5)_1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, matriks di atas dapat dituliskan

$$[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$$

Bentuk ini berlaku untuk $j = 1$.

2. Saat nilai $j = N - 1$ maka Persamaan (5.25)-(5.27) dan (5.31)-(5.32) menjadi

$$(\delta f_{N-1} - \delta f_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) = (r_1)_{N-1}$$

$$(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta v_{N-1} - \delta v_{N-2}) = (r_2)_{N-1}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta s_{N-1} - \delta s_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta q_{N-1} - \delta q_{N-2}) = (r_3)_{N-1} \\
& (a_1)_{N-1}\delta f_{N-1} + (a_2)_{N-1}\delta f_{N-2} + (a_3)_{N-1}\delta u_{N-1} + (a_4)_{N-1}\delta u_{N-2} \\
& \quad + (a_5)_{N-1}\delta v_{N-1} + (a_6)_{N-1}\delta v_{N-2} = (r_4)_{N-1} \\
& (b_1)_{N-1}\delta q_{N-1} + (b_2)_{N-1}\delta q_{N-2} + (b_3)_{N-1}\delta f_{N-1} + (b_4)_{N-1}\delta f_{N-2} + (b_5)_{N-1}\delta s_{N-1} \\
& \quad + (b_6)_{N-1}\delta s_{N-2} = (r_5)_{N-1}
\end{aligned}$$

Dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ 0 & 0 & (a_2)_{N-1} & (a_6)_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_{N-1} & 0 & (b_2)_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_{N-2} \\ \delta q_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{pmatrix} + \\
& \begin{pmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ (a_4)_{N-1} & 0 & (a_1)_{N-1} & (a_5)_{N-1} & 0 \\ 0 & (b_6)_{N-1} & (b_3)_{N-1} & 0 & (b_1)_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-2} \\ \delta s_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{pmatrix} + \\
& \begin{pmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_{N-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_5)_{N-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta s_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_{N-1} \\ (r_2)_{N-1} \\ (r_3)_{N-1} \\ (r_4)_{N-1} \\ (r_5)_{N-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Bentuk matriks di atas dapat dinyatakan sebagai berikut

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$$

Bentuk ini berlaku untuk setiap $j = 2, 3, \dots, N-1$.

3. Saat nilai $j = N$ maka Persamaan (5.25)-(5.27) dan (5.31)-(5.32) menjadi

$$\begin{aligned}
& (\delta f_N - \delta f_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta u_N - \delta u_{N-1}) = (r_1)_N \\
& (\delta u_N - \delta u_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta v_N - \delta v_{N-1}) = (r_2)_N \\
& (\delta s_N - \delta s_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta q_N - \delta q_{N-1}) = (r_3)_N \\
& (a_1)_N\delta f_N + (a_2)_N\delta f_{N-1} + (a_3)_N\delta u_N + (a_4)_N\delta u_{N-1} + (a_5)_N\delta v_N + (a_6)_N\delta v_{N-1} \\
& \quad = (r_4)_N
\end{aligned}$$

$$(b_1)_N \delta q_N + (b_2)_N \delta q_{N-1} + (b_3)_N \delta f_{N-2} + (b_4)_N \delta f_{N-1} + (b_5)_N \delta s_N + (b_6)_N \delta s_{N-1} \\ = (r_5)_N$$

Dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ 0 & 0 & (a_2)_N & (a_6)_N & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_N & 0 & (b_2)_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{pmatrix} + \\ \begin{pmatrix} -\frac{l_N}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ (a_4)_N & 0 & (a_1)_N & (a_5)_N & 0 \\ 0 & (b_6)_N & (b_3)_N & 0 & (b_1)_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta s_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_N \\ (r_2)_N \\ (r_3)_N \\ (r_4)_N \\ (r_5)_N \end{pmatrix}$$

Bentuk matriks di atas dapat dinyatakan sebagai berikut

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j]$$

Bentuk ini berlaku untuk $j = N$.

Dengan demikian secara keseluruhan untuk $j = 1, 2, 3, \dots, N$ secara sederhana dapat dituliskan

$$\begin{aligned} j = 1 & : [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1] \\ j = 2 & : [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] = [r_2] \\ j = 3 & : [B_3][\delta_2] + [A_3][\delta_3] + [C_3][\delta_4] = [r_3] \\ & \vdots \\ j = N-1 & : [B_{N-1}][\delta_{N-2}] + [A_{N-1}][\delta_{N-1}] + [C_{N-1}][\delta_N] = [r_{N-1}] \\ j = N & : [B_N][\delta_{N-1}] + [A_N][\delta_N] = [r_N] \end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{A}\delta = \mathbf{r} \quad (5.44)$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} [A_1] & [C_1] & & & \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [B_{N-1}] & [A_{N-1}] & [C_{N-1}] \\ & & & & [B_N] & [A_N] \end{pmatrix}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{N-1}] \\ [\delta_N] \end{pmatrix} \text{ dan } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ \vdots \\ [r_{N-1}] \\ [r_N] \end{pmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (5.38), dapat dilihat bahwa matriks A adalah matriks tridiagonal yang elemen-elemennya bernilai nol kecuali pada diagonal utamanya. Persamaan (5.38) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok. Matriks A adalah matriks non singular sehingga dapat difaktorkan sebagai

$$A = LU \quad (5.45)$$

dengan

$$L = \begin{pmatrix} [\alpha_1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [B_2] & [\alpha_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\alpha_{N-1}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [B_N] & [\alpha_N] \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} [I] & [\Gamma_1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [I] & [\Gamma_2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [I] & [\Gamma_{N-1}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [I] \end{pmatrix}$$

dengan $[I]$ adalah matriks identitas yang berukuran 5×5 dan $[\alpha_j]$, $[\Gamma_j]$ merupakan matriks ukuran 5×5 dengan elemen-elemennya ditentukan dengan persamaan berikut

$$[\alpha_j] = [A_1]$$

$$[A_1][\Gamma_j] = [C_1]$$

$$[\alpha_j] = [A_j] - [B_j][\Gamma_{j-1}], j = 2, 3, \dots, N$$

$$[\alpha_j][\Gamma_j] = [C_j], \quad j = 2, 3, \dots, N - 1$$

Selanjutnya, disubstitusikan Persamaan (5.45) ke Persamaan (5.44) maka didapatkan persamaan

$$LU\delta = r \quad (5.46)$$

Dengan mendefinisikan bahwa

$$LU\delta = W \quad (5.47)$$

Sehingga Persamaan (5.46) dapat dituliskan sebagai

$$LW = r \quad (5.48)$$

Dengan

$$W = \begin{pmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \vdots \\ [W_{N-1}] \\ [W_N] \end{pmatrix}$$

Dan $[W_j]$ adalah matriks berukuran 5×1 dengan elemen-elemennya didapatkan Persamaan (5.48) yaitu

$$[\alpha_1][W_1] = [r_1]$$

$$[\alpha_j][W_j] = [r_j] - [B_j][W_{j-1}], \quad 2 \leq j \leq N$$

Setelah didapatkan elemen-elemen dari matriks W, maka selanjutnya dapat ditentukan penyelesaian dari δ pada Persamaan (5.45) dengan menggunakan persamaan berikut

$$[\delta_j] = [W_1]$$

$$[\delta_j] = [W_j] - [\Gamma_j][\delta_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq N - 1$$

Dengan diperolehnya nilai δ , maka Persamaan (5.25)-(5.27) dan (5.32)-(5.33) dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian Persamaan (5.21) dengan melakukan iterasi sebanyak sampai memenuhi kriteria konvergen. Menurut Cebeci dan Bradshaw (1984) kriteria konvergen menggunakan $v(0, t)$ dan iterasi berhenti saat didapatkan $|\delta v(0, t)| < \varepsilon$, dimana nilai dari ε sangat kecil. Pada penelitian ini digunakan $\varepsilon = 10^{-5}$.

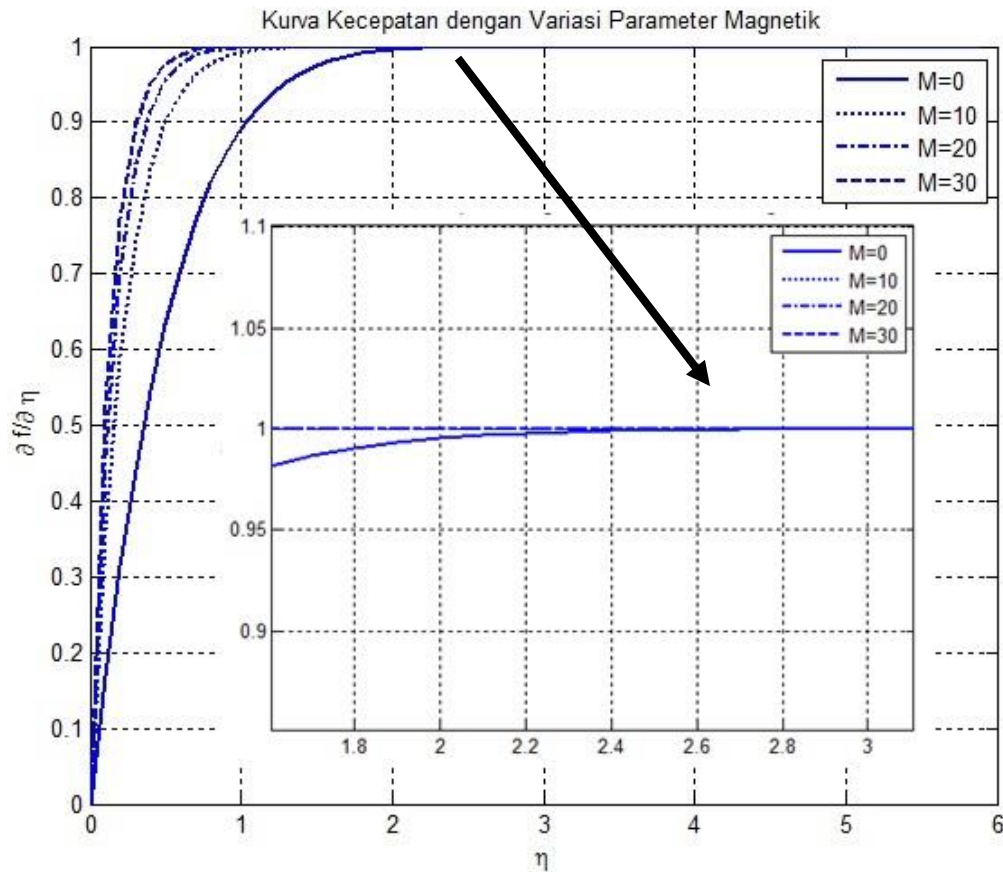
5.5 Hasil Simulasi Numerik

Tahapan selanjutnya setelah diperoleh penyelesaian numerik adalah simulasi menggunakan *software* Matlab. Pada simulasi penelitian ini menggunakan beberapa parameter dan dilakukan dengan beberapa kali percobaan parameter. Namun, hanya

ditampilkan beberapa hasil simulasi yang dapat mewakili percobaan simulasi yang telah dilakukan. Berdasarkan hasil simulasi yang telah dilakukan, didapatkan hubungan antara parameter magnetik (M), bilangan Prandtl (Pr), parameter konveksi (α), parameter porositas (ϕ) dan parameter permeabilitas (K^*) terhadap kecepatan (f') dan temperatur (s). Uraian dari masing-masing pengaruh parameter tersebut adalah sebagai berikut.

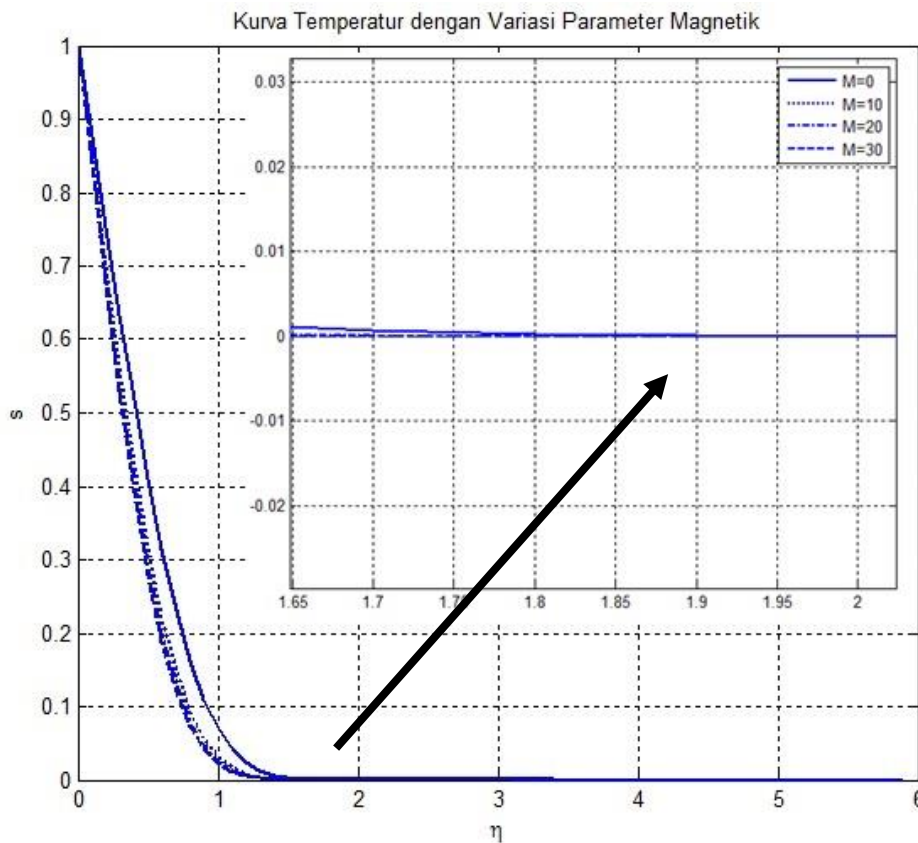
5.5.1 Pengaruh Variasi Parameter Magnetik

Pada simulasi ini diperoleh pengaruh parameter magnetik terhadap kurva kecepatan dan temperatur fluida dengan menggunakan variasi parameter magnetik yaitu $M = 0, 10, 20, 30$. Nilai parameter yang lainnya, yaitu $Pr = 0.7$, $\phi = 1$, banyak partisi $\eta = 60$ dengan $\Delta\eta = l_j = 0.1$ dan partisi $t = 33$ dengan $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$ dan $t = 1.65$. Nilai $M = 0$ menyatakan tidak adanya pengaruh medan magnet pada aliran.



Gambar 5.2 Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik (M), $\alpha = 0$, $Pr = 4.34$, dan $\phi = 1$

Pada Gambar 5.2 ditunjukkan hasil simulasi pengaruh parameter magnetik terhadap kurva kecepatan dan dapat diamati bahwa kecepatan mengalami peningkatan dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$. Ketika $0 < \eta < 2,7$, kecepatan semakin meningkat ketika parameter magnetik semakin bertambah. Hal ini terjadi karena besar medan magnet yang bekerja semakin besar dan densitas fluida semakin kecil dengan bertambahnya parameter magnetik. Secara matematis $M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty}$ yang berarti $M \sim B_0$ dan $M \sim \frac{1}{\rho}$. $M \sim B_0$ menyatakan bahwa dengan bertambahnya M maka medan magnet meningkat sehingga gerakan-gerakan muatan listrik yang ada dalam medan magnet meningkat. Akan tetapi densitas fluida berkurang ketika medan magnet mengalami peningkatan karena $M \sim \frac{1}{\rho}$. Dengan berkurangnya densitas fluida ini berarti kerapatan atau massa per satuan volume semakin kecil yang mengakibatkan kecepatan fluida meningkat. Karena faktor gerakan molekul yang meningkat dan densitas fluida yang berkurang maka kecepatan semakin meningkat dengan bertambahnya parameter magnetik.

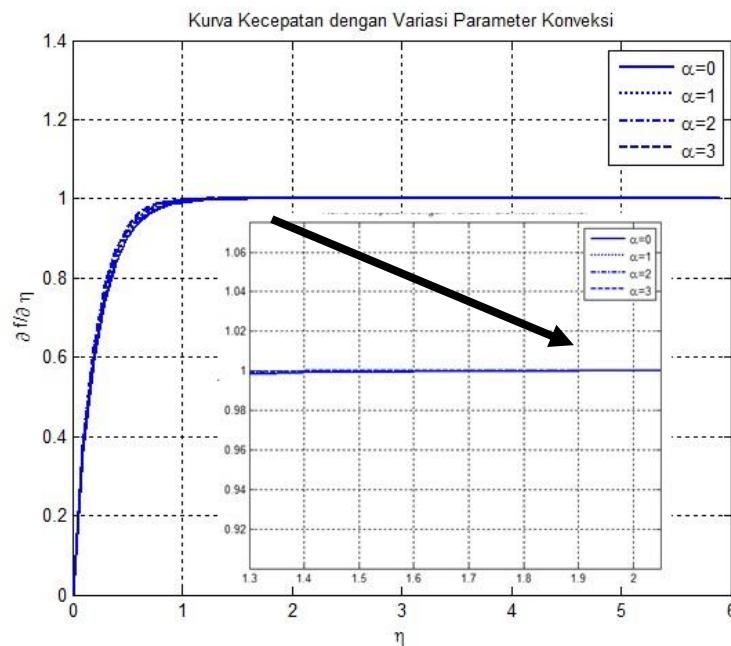


Gambar 5.3 Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik (M), $\alpha = 0$, $Pr = 4.34$, dan $\phi = 1$

Pada Gambar 5.3 ditunjukkan hasil simulasi pengaruh parameter magnetik terhadap kurva temperatur dan dapat diamati bahwa temperatur mengalami penurunan dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Ketika $0 < \eta < 1,9$, temperatur semakin menurun ketika parameter magnetik semakin bertambah. Hal ini terjadi karena energi internal fluida semakin meningkat. Energi internal fluida meningkat karena pengaruh medan magnet dan densitas semakin berkurang dengan bertambahnya parameter magnetik. Karena energi internal semakin meningkat, maka energi yang digunakan fluida untuk bergerak berkurang. Dengan demikian, densitas juga berkurang yang berarti kerapatan molekul fluida berkurang sehingga distribusi panas antar fluida berkurang. Hal ini berakibat temperatur mengalami penurunan seiring bertambahnya parameter magnetik.

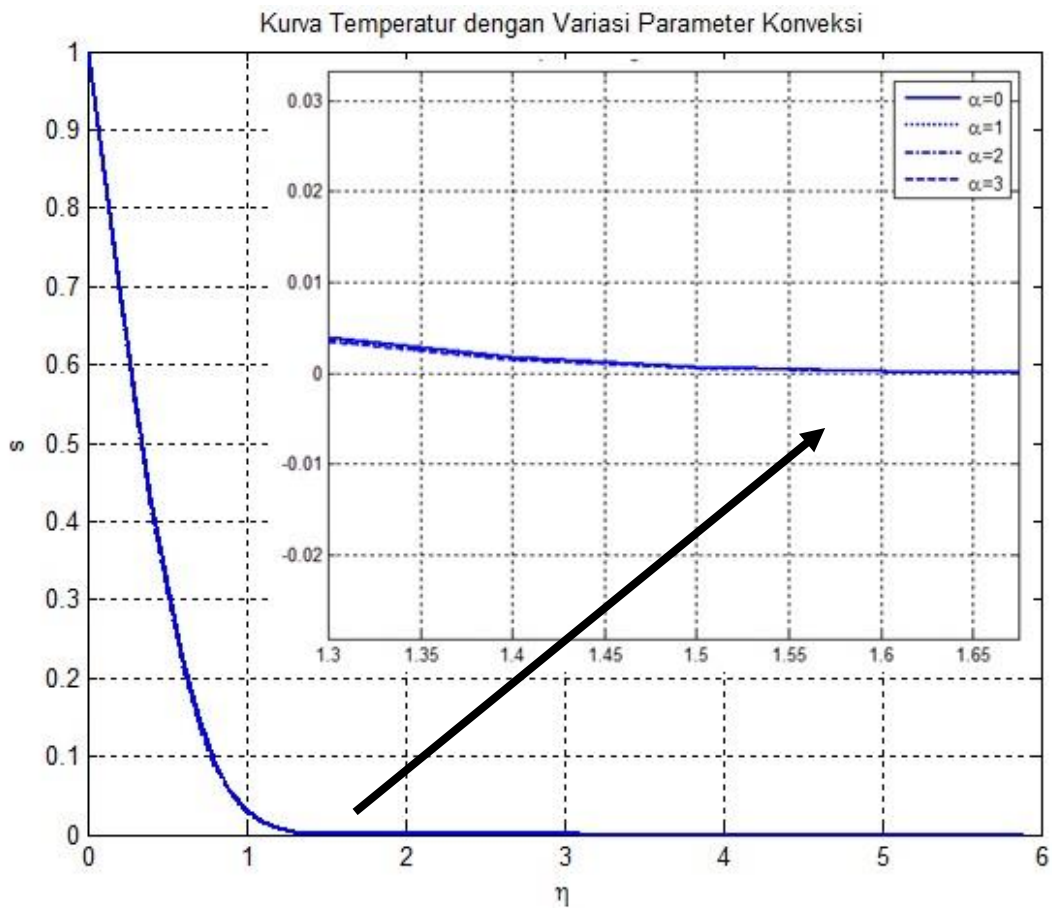
5.5.2 Pengaruh Variasi Parameter Konveksi

Pada simulasi ini dibahas pengaruh parameter konveksi terhadap kurva kecepatan dan temperatur fluida. Variasi parameter konveksi yang digunakan pada simulasi ini, yaitu $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Nilai $\alpha = 0$ menunjukkan konveksi paksa dan nilai $\alpha > 0$ menunjukkan konveksi campuran. Nilai parameter yang lainnya, yaitu $M = 10$, $Pr = 4.34$, $\phi = 1$, banyak partisi $\eta = 60$ dengan $\Delta\eta = l_j = 0.1$ dan partisi $t = 33$ dengan $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$ dan $t = 1.65$.



Gambar 5.4 Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Konveksi (α), $M = 10$,
 $Pr = 4.34$, dan $\phi = 1$

Pada Gambar 5.4 ditunjukkan pengaruh parameter konveksi terhadap kurva kecepatan dan dapat diamati bahwa kecepatan mengalami peningkatan mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$. Ketika $0 < \eta < 1,9$, kecepatan semakin meningkat ketika parameter konveksi semakin bertambah. Hal ini terjadi karena gaya apung pada fluida semakin besar ketika parameter konveksi bertambah. Karena gaya apung semakin besar, maka momentum fluida semakin bertambah sehingga berakibat kecepatan fluida semakin meningkat.



Gambar 5.5 Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Konveksi (α), $M = 10$,
 $Pr = 4.34$, dan $\phi = 1$

Pada Gambar 5.5 ditunjukkan pengaruh parameter konveksi terhadap kurva temperatur dan terjadi penurunan temperatur fluida mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Ketika $0 < \eta < 1,6$, temperatur fluida semakin menurun ketika parameter konveksi semakin bertambah. Secara matematis $\alpha = \frac{Gr}{Re^2}$ yang berarti jika parameter konveksi semakin bertambah maka bilangan Grashof semakin besar ($\alpha \sim Gr$). Secara matematis

bilangan Grashof dinyatakan dengan $Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{\nu^2}$ yang berarti bahwa $\alpha \sim Gr \sim (T_w - T_\infty)$. Temperatur mengalami penurunan karena $(T_w - T_\infty)$ semakin besar. Apabila nilai temperatur dinding (T_w) tetap dan parameter konveksi semakin bertambah, maka temperatur fluida (T_∞) akan semakin kecil.

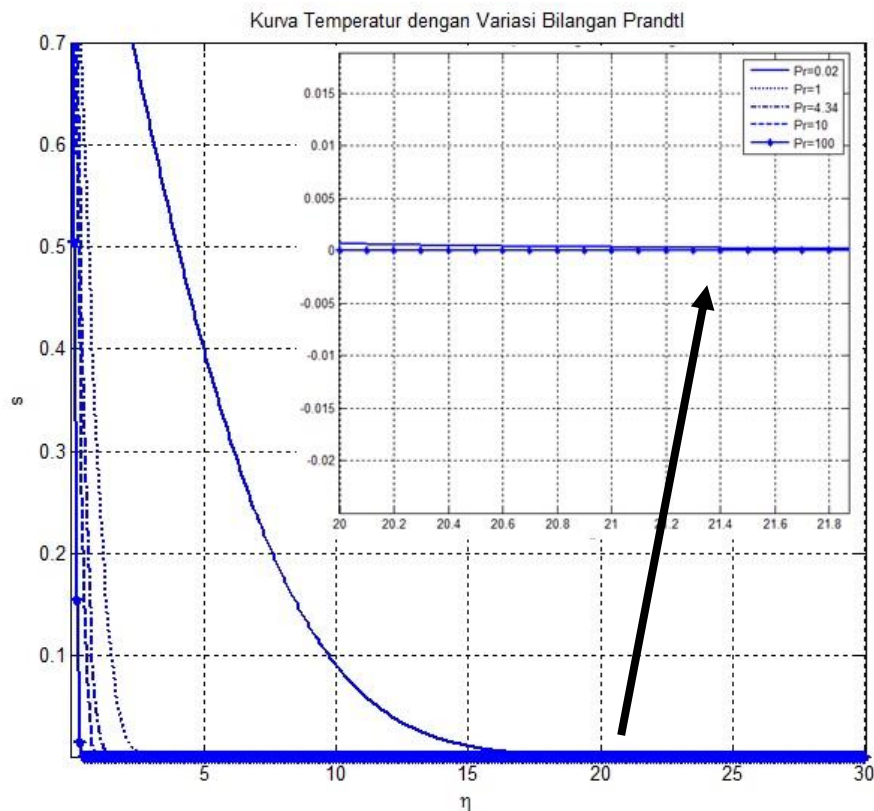
5.5.3 Pengaruh Variasi Bilangan Prandtl

Pada simulasi ini diperoleh pengaruh variasi bilangan Prandtl terhadap kurva kecepatan dan temperatur. Variasi bilangan Prandtl yang digunakan pada simulasi ini, yaitu $Pr = 0.02, 1, 4.34, 10, 100$ yang masing-masing merepresentasikan logam cair geofisika, air panas bumi, fluida akuifer suhu rendah, reservoir hidrokarbon (minyak), dan minyak ringan (Takhar & Beg, 1997). Nilai parameter yang lainnya, yaitu $M = 10$, $\alpha = 0$, $\phi = 1$, banyak partisi $\eta = 60$ dengan $\Delta\eta = l_j = 0.1$ dan partisi $t = 33$ dengan $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$ dan $t = 1.65$.

Tabel 5.1 Nilai Kecepatan dengan Variasi Bilang Prandtl (Pr), $M = 10$, $\alpha = 0$, $\phi = 1$

Ketebalan	Kecepatan $Pr = 0.02$	Kecepatan $Pr = 1$	Kecepatan $Pr = 4.34$	Kecepatan $Pr = 10$	Kecepatan $Pr = 100$
0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
1.0000e-01	3.6054e-01	3.6054e-01	3.6054e-01	3.6054e-01	3.6054e-01
2.0000e-01	5.9093e-01	5.9093e-01	5.9093e-01	5.9093e-01	5.9093e-01
3.0000e-01	7.4444e-01	7.4444e-01	7.4444e-01	7.4444e-01	7.4444e-01
4.0000e-01	8.3883e-01	8.3883e-01	8.3883e-01	8.3883e-01	8.3883e-01
5.0000e-01	9.0043e-01	9.0043e-01	9.0043e-01	9.0043e-01	9.0043e-01
6.0000e-01	9.3877e-01	9.3877e-01	9.3877e-01	9.3877e-01	9.3877e-01
7.0000e-01	9.6262e-01	9.6262e-01	9.6262e-01	9.6262e-01	9.6262e-01
8.0000e-01	9.7741e-01	9.7741e-01	9.7741e-01	9.7741e-01	9.7741e-01
9.0000e-01	9.8647e-01	9.8647e-01	9.8647e-01	9.8647e-01	9.8647e-01
1.0000e+00	9.9197e-01	9.9197e-01	9.9197e-01	9.9197e-01	9.9197e-01
1.1000e+00	9.9527e-01	9.9527e-01	9.9527e-01	9.9527e-01	9.9527e-01
1.2000e+00	9.9724e-01	9.9724e-01	9.9724e-01	9.9724e-01	9.9724e-01
1.3000e+00	9.9841e-01	9.9841e-01	9.9841e-01	9.9841e-01	9.9841e-01
1.4000e+00	9.9909e-01	9.9909e-01	9.9909e-01	9.9909e-01	9.9909e-01
1.5000e+00	9.9948e-01	9.9948e-01	9.9948e-01	9.9948e-01	9.9948e-01
1.6000e+00	9.9971e-01	9.9971e-01	9.9971e-01	9.9971e-01	9.9971e-01
1.7000e+00	9.9984e-01	9.9984e-01	9.9984e-01	9.9984e-01	9.9984e-01
1.8000e+00	9.9991e-01	9.9991e-01	9.9991e-01	9.9991e-01	9.9991e-01
1.9000e+00	9.9995e-01	9.9995e-01	9.9995e-01	9.9995e-01	9.9995e-01
2.0000e+00	9.9997e-01	9.9997e-01	9.9997e-01	9.9997e-01	9.9997e-01
2.1000e+00	9.9999e-01	9.9999e-01	9.9999e-01	9.9999e-01	9.9999e-01
2.2000e+00	9.9999e-01	9.9999e-01	9.9999e-01	9.9999e-01	9.9999e-01

Pada Tabel 5.1 dapat diamati bahwa kecepatan fluida bernilai tetap terhadap variasi bilangan Prandtl. Secara matematis dalam persamaan momentum terdapat suku $\frac{2}{3}\alpha s$ dengan α merupakan parameter konveksi dan s merupakan temperatur. Variasi Bilangan Prandtl berpengaruh terhadap temperatur yang dalam hal ini diwakilkan oleh s . Jika nilai $\alpha \approx 0$ yang berarti konveksi paksa, maka berapapun nilai s tidak mempengaruhi $\frac{2}{3}\alpha s$ karena nilainya akan tetap 0. Hal ini menyebabkan variasi bilangan Prandtl tidak mempengaruhi kecepatan ketika adanya konveksi paksa.



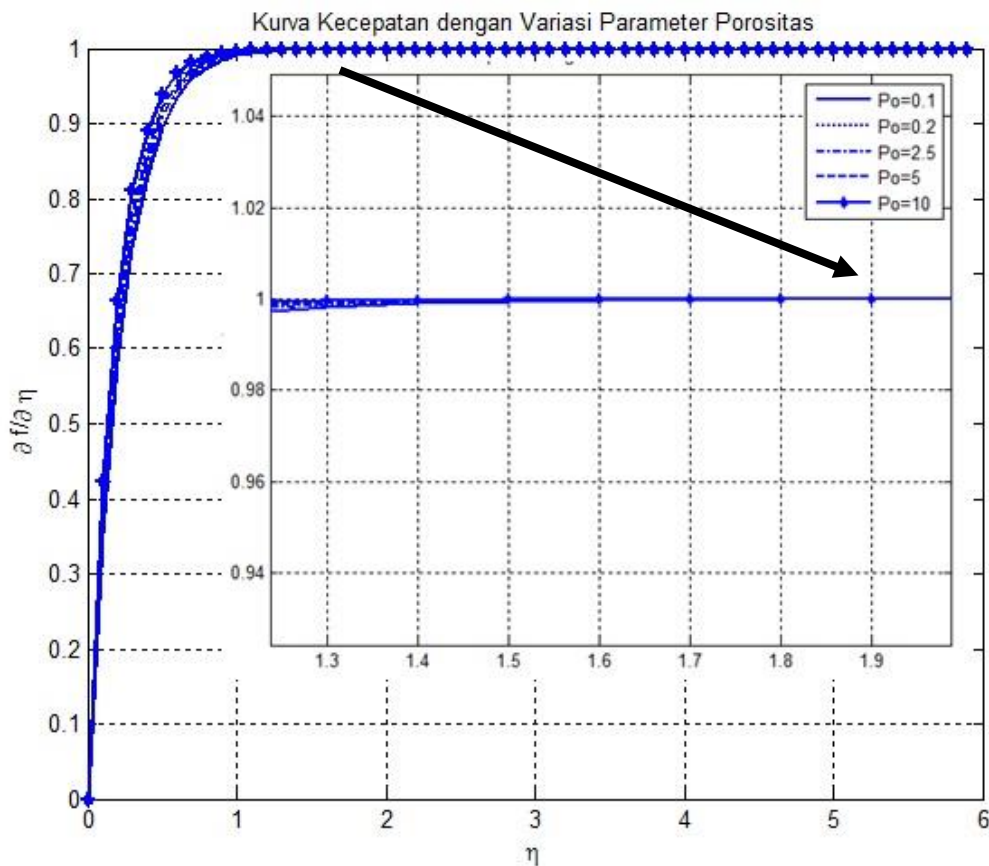
Gambar 5.6 Kurva Temperatur dengan Variasi Bilangan Prandtl (Pr), $M = 10$, $\alpha = 0$, dan $\phi = 1$

Pada Gambar 5.6 ditunjukkan pengaruh bilangan Prandtl terhadap kurva temperatur dan terjadi penurunan temperatur fluida mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Ketika $0 < \eta < 21,4$, temperatur semakin menurun ketika bilangan Prandtl semakin bertambah. Secara matematis $Pr = \frac{v\rho C_p}{c}$ yang artinya bilangan Prandtl merupakan perbandingan viskositas kinematika dengan difusivitas termal. Viskositas kinematika berkaitan dengan kecepatan perpindahan antar molekul, sedangkan difusivitas termal

berkaitan dengan perbandingan penerusan panas dengan kapasitas penyimpanan energi molekul. Semakin besar bilangan Prandtl mengakibatkan difusivitas termal semakin kecil karena bilangan Prandtl berbanding terbalik dengan difusivitas termal. Ini berarti bahwa dengan bertambahnya bilangan Prandtl maka distribusi panas antar fluida berkurang atau dapat dikatakan bahwa perpindahan panas ke permukaan benda lebih cepat daripada fluidanya sehingga mengakibatkan temperatur fluida semakin menurun dengan bertambahnya bilangan Prandtl.

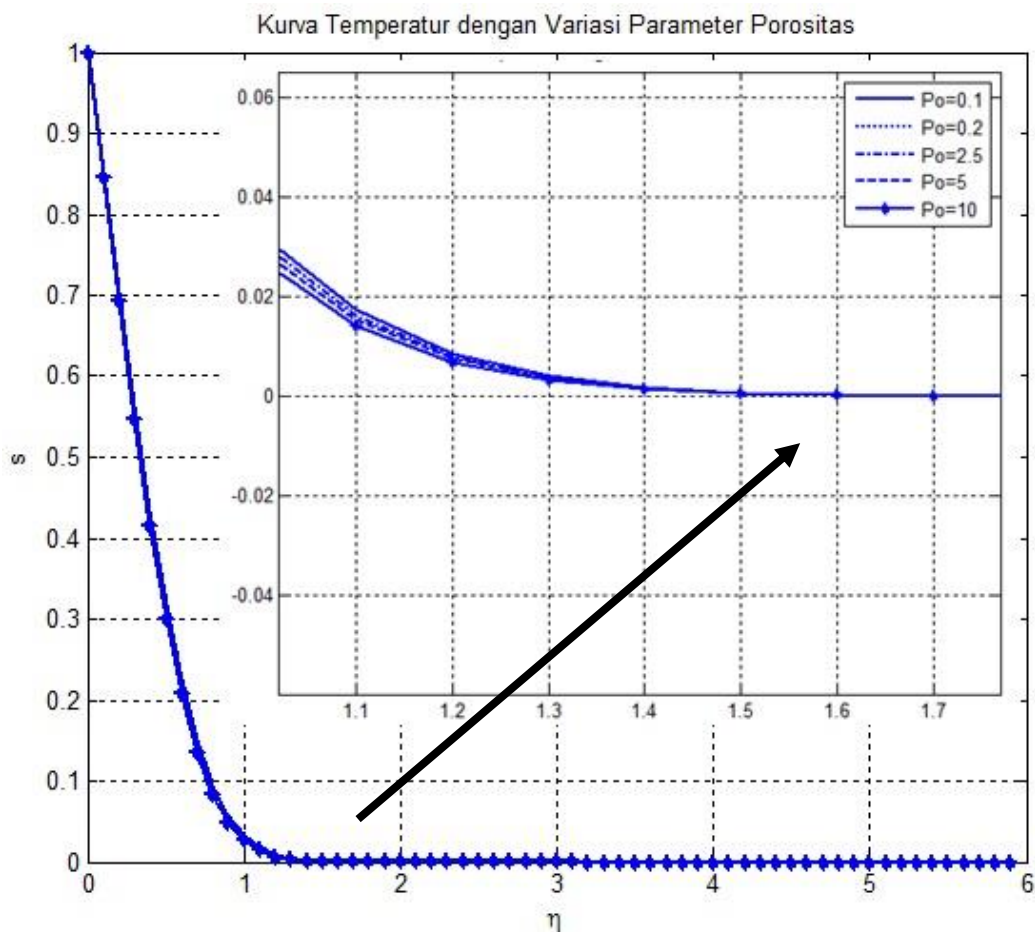
5.5.4 Pengaruh Variasi Parameter Porositas

Pada simulasi ini diperoleh pengaruh parameter porositas terhadap kurva kecepatan dan temperatur fluida. Variasi parameter porositas yang digunakan pada simulasi ini, yaitu $\phi = 0.1, 0.2, 2.5, 5, 10$. Nilai parameter yang lainnya, yaitu $M = 10$, $Pr = 4.34$, $\alpha = 0$, banyak partisi $\eta = 60$ dengan $\Delta\eta = l_j = 0.1$ dan partisi $t = 33$ dengan $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$ dan $t = 1.65$.



Gambar 5.7 Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Porositas (ϕ), $M = 10$, $\alpha = 0$, dan $Pr = 4.34$

Pada Gambar 5.7 ditunjukkan pengaruh parameter porositas terhadap kurva kecepatan dan dapat diamati bahwa kecepatan mengalami peningkatan mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$. Ketika $0 < \eta < 1,9$, kecepatan semakin meningkat ketika parameter porositas semakin bertambah. Secara matematis $\phi = \frac{a\mu}{\rho U_{\infty} K^*}$ yang berarti jika parameter porositas semakin bertambah, maka densitas fluida semakin berkurang ($\phi \sim \frac{1}{\rho}$). Dengan berkurangnya densitas fluida ini berarti kerapatan atau massa per satuan volume semakin kecil yang mengakibatkan kecepatan fluida meningkat.



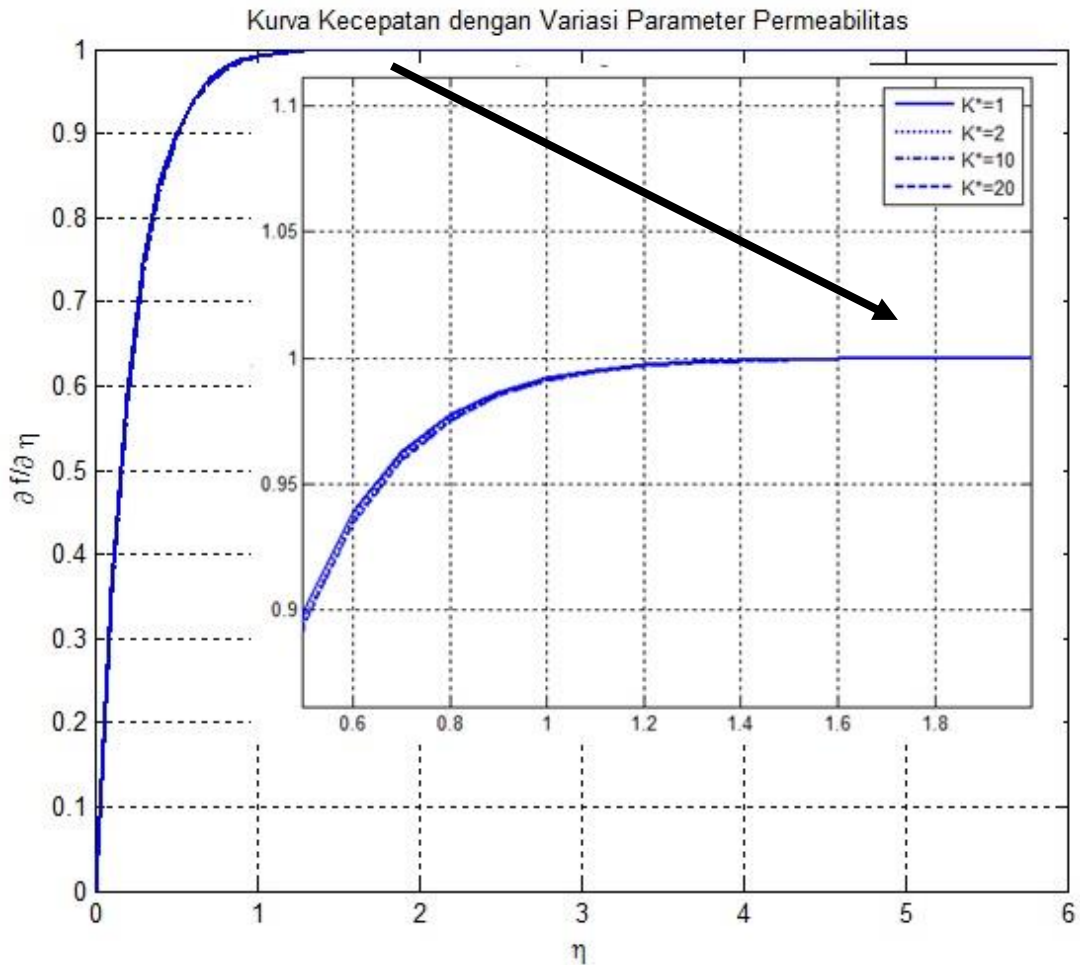
Gambar 5.8 Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Porositas (ϕ), $M = 10$, $\alpha = 0$, dan $Pr = 4.34$

Pada Gambar 5.8 ditunjukkan hasil simulasi pengaruh parameter magnetik terhadap kurva temperatur dan dapat diamati bahwa temperatur mengalami penurunan dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Ketika $0 < \eta < 1,6$, temperatur semakin menurun ketika

parameter porositas semakin bertambah dan densitas semakin berkurang. Densitas berkurang karena kerapatan molekul fluida berkurang sehingga distribusi panas antar fluida berkurang. Hal ini berakibat temperatur mengalami penurunan seiring bertambahnya parameter porositas.

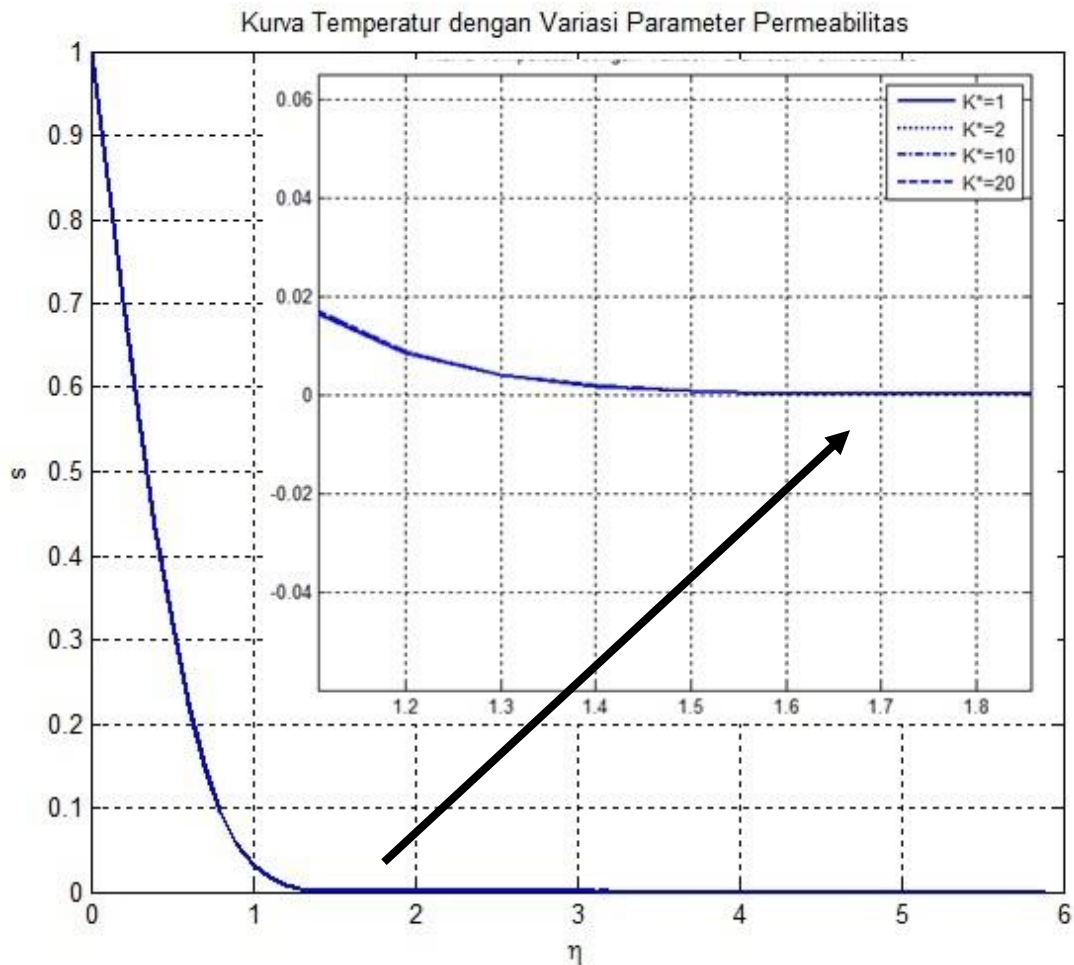
5.5.5 Pengaruh Variasi Parameter Permeabilitas

Pada simulasi ini dikaji pengaruh parameter permeabilitas terhadap kurva kecepatan dan temperatur fluida. Variasi parameter permeabilitas yang digunakan pada simulasi ini, yaitu $K^* = 1, 2, 10, 20$. Nilai parameter yang lainnya, yaitu $M = 10$, $Pr = 4.34$, $\alpha = 0$, banyak partisi $\eta = 60$ dengan $\Delta\eta = l_j = 0.1$ dan partisi $t = 33$ dengan $\Delta t = k^n = 5 \times 10^{-2}$ dan $t = 1.65$.



Gambar 5.9 Kurva Kecepatan dengan Variasi Parameter Permeabilitas (K^*), $M = 10$, $\alpha = 0$, dan $Pr = 4.34$

Pada Gambar 5.9 ditunjukkan pengaruh parameter permeabilitas terhadap kurva kecepatan dan dapat diamati bahwa kecepatan mengalami peningkatan mulai dari $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$. Ketika $0 < \eta < 1,8$, kecepatan semakin menurun ketika parameter permeabilitas semakin bertambah. Hal ini terjadi karena media berpori menyebabkan retardasi sehingga dapat mengurangi kecepatan fluida. Secara matematis $\phi = \frac{a\mu}{\rho U_{\infty} K^*}$ yang berarti jika parameter permeabilitas (K^*) semakin bertambah, maka parameter porositas (ϕ) semakin berkurang. Karena $\phi \sim \frac{1}{\rho}$, maka densitas fluida (ρ) bertambah seiring berkurangnya parameter porositas. Dengan bertambahnya densitas fluida ini berarti kerapatan atau massa per satuan volume semakin besar yang mengakibatkan kecepatan fluida menurun.



Gambar 5.10 Kurva Temperatur dengan Variasi Parameter Permeabilitas (K^*), $M = 10$, $\alpha = 0$, dan $Pr = 4.34$

Pada Gambar 5.10 ditunjukkan hasil simulasi pengaruh parameter magnetik terhadap kurva temperatur dan dapat diamati bahwa temperatur mengalami penurunan dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Ketika $0 < \eta < 1,7$, temperatur semakin meningkat ketika parameter permeabilitas semakin bertambah. Hal ini terjadi karena densitas semakin bertambah yang berarti kerapatan molekul fluida bertambah, sehingga distribusi panas antar fluida bertambah. Hal ini berakibat temperatur mengalami peningkatan seiring bertambahnya parameter permeabilitas.

BAB VI

KESIMPULAN DAN SARAN

6.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil simulasi numerik dengan menggunakan beberapa variasi parameter, yaitu parameter magnetik (M), bilangan Prandtl (Pr), parameter konveksi (α), parameter porositas (ϕ) dan parameter permeabilitas (K^*) terhadap kecepatan dan temperatur, dapat disimpulkan sebagai berikut

- a. Ketika parameter magnetik (M) meningkat, maka kecepatan fluida juga meningkat di $0 < \eta < 2,7$, sedangkan temperturnya semakin menurun di $0 < \eta < 1,9$.
- b. Ketika bilangan Prandtl (Pr) meningkat, maka kecepatan fluida tidak berubah dengan adanya konveksi paksa, sedangkan temperatur fluida mengalami penurunan di $0 < \eta < 21,4$.
- c. Ketika parameter konveksi (α) meningkat, maka kecepatan fluida juga meningkat di $0 < \eta < 1,9$, sedangkan temperturnya semakin menurun di $0 < \eta < 1,6$.
- d. Ketika parameter porositas (ϕ) meningkat, maka kecepatan fluida juga meningkat di $0 < \eta < 1,9$, sedangkan temperturnya semakin menurun di $0 < \eta < 1,6$.
- e. Ketika parameter permeabilitas (K^*) meningkat di $0 < \eta < 1,8$, maka kecepatan fluida menurun, sedangkan temperatur semakin meningkat di $0 < \eta < 1,7$.

6.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, saran yang dapat diberikan pada penelitian selanjutnya adalah

- a. Studi lapisan batas tidak pada titik stagnasi, sehingga dapat dilihat kurva kecepatan dan temperatur disekeliling permukaan bola berpori tak bermagnet dengan fluida magnetohidrodinamik.

- b. Studi lapisan batas tidak pada titik stagnasi, sehingga dapat dilihat kurva kecepatan dan temperatur disekeliling permukaan bola berpori bermagnet dengan fluida yang terinduksi dari magnet bola berpori.

DAFTAR PUSTAKA

- Abbas, Z. and Hayat, T. (2008), "Radiation Effects on MHD Flow in A Porous Space", *Internation Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, No. 5, hal. 1024-1033.
- Anggriani, I. (2016), *Pengaruh Magnetohidrodinamik (MHD) pada Fluida Micropolar yang Melewati Bola Berpori*, Tesis Magister, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Al-Shibani, F.S., Ismail, A.I.Md., dan Abdullah, F.A. (2012), "The Implicit Keller Box Method for The One Dimensional Time Fractional Diffusion Equation", *Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics*, Vol. 2, No. 3, hal. 69-84.
- Arber, T. (2013), *Fundamental of Magnetohydrodynamics (MHD)*, Lecture handout: University of Warwick, UK.
- Bejan, A. (2013), *Convection Heat Transfer*, 4th Edition, John Wiley, United States Of America.
- Cebecci, T. and Bradshaw. P. (1984), *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*, Springer-Verlag, New York.
- Elseth, G. (2001) *An Experimental Study of Oil/ Water Flow in Horizontal Pipes*, Tesis Ph.D., Telemark University College, Norwegia.
- Fathizadeh, M., Madani, M., Khan, Y., Faraz, N., Yildirin, A. and Tutkun, S. (2013). "An Effective Modification of The Homotopy Perturbation Method for MHD Viscous Flow Over A Stretching Sheet. *Journal of King Saud University-Science*, Vol. 25, No. 2, hal. 107-113.
- Fox, R.W., McDonald, A.T., dan Pritchard, P.J., (2011), *Introduction to Fluid Mechanics*, 8th edition, John Wiley and Sons, United States Of America.
- Hardianto, T. (2009), "Penampilan Generator Magnetohidrodinamika Dinding Hantaran Diagonal pada Kondisi Plasma Non-Uniformity". *Jurnal Rekayasa*, Vol. 6, No. 1.
- Hoernel, J.D. (2008), "On The Similarity Solutions for A Steady MHD Equation", *Communications in NonlinearScience and Numerical Simulation*, Vol. 13, No. 7, hal. 1353-1360.

- Hussanan, A., Ismail, Z., Khan, I., Hussein, A., dan Shafie, S. (2014), "Unsteady Boundary Layer MHD Free Convection Flow in a Porous Medium with Constant Mass Diffusion and Newtonian Heating", *The European Physical Journal Plus*, hal. 1-16.
- Iskandar and Yusra, Sauqi and Havendri, Adly (2014), *Lapisan Batas Eksperimental Beberapa Permukaan Benda Padat*. Project Report. Lembaga Penelitian Universitas Andalas, Padang.
- Kasim, A.R.M. (2014), *Convective Boundary Layer Flow of Viscous Elastic Fluid*, Universiti Teknologi Malaysia, Malaysia.
- Khalimah, D.A. (2015), *Analisa Aliran Tak Tunak Konveksi Paksa Fluida Kental Magnetohidrodinamik (MHD) Melewati Silinder Eliptik*, Tesis Magister, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Kudenatti, R. B., Kirsur, S. R., Achala, L. and Bujurke, N. (2013). "Exact Solution of Two-Dimensional MHD Boundary Layer Flow Over A Semi-Infinite Flat Plate", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Solution*. Vol. 18, No. 5, hal. 1151-1161.
- Kumaran. (2009), "MHD Flow Past A Stretching Permeable Sheet", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 210, No. 1, hal. 26-32.
- Leal, L. (1992), *Laminar Flow and Convective Transport Processes: Scaling Principles and Asymptotic Analysis*, Butterworth-Heinemann.
- Lienhard, J. H. (2002), *A Heat Transfer Textbook*, Courier Dover Publications.
- Mohammad, N.F, (2014), *Unsteady Magnetohydrodynamic Convective Boundary Layer Flow Past a Sphere In Viscous and Micropolar Fluids*, Thesis Doctor of Philosophy (Mathematics). Universiti Teknologi Malaysia, Malaysia.
- Ouaf, M. E. (2005), "Exact solution of thermal radiation on MHD flow over a stretching porous sheet", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 170, No. 2, hal. 1117-1125.
- Potter, M.C., Wiggert, D.C., dan Ramadan, B.H. (2015), *Mechanics of Fluids*, 4th Edition, Cengage Learning, USA.
- Raptis A. and Perdikis C. (1983), *Flow of Viscous Fluid Through a Porous Medium Bounded By a Vertical Surface*, Pergamon Press Ltd, Britain.

- Sajid, M. and Hayat, T. (2009), "The Application of Homotopy Analysis Method for MHD Viscous Flow Due to A Shrinking Sheet", *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 39, No. 3, hal. 1317-1323.
- Walujodjati, A. (2009), "Pengaruh Kecepatan Fan Terhadap Temperatur Perpindahan Panas Aliran Udara dalam Pipa dengan Fluks Panas Permukaan Konstan", *Momentum*, Vol. 5, No. 2, hal. 46-49.
- Widodo, B. (2012), *Pemodelan Matematika*, ITSPress, Surabaya.
- Widodo, B., Khalimah, D.A., Zainal, F.D.S., dan Imron, C. (2015), "The Effect of Prandtl Number and Magnetic Parameter on Forced Convection Unsteady Magnetohydrodynamic Boundary Layer Flow of A Viscous Fluid Past A Sphere", *International Conference on Science and Innovative Engineering (ICSIE)*, Kuala Lumpur.
- Widodo, B., Khalimah, D.A., Zainal, F.D.S., dan Imron, C. (2015a), "Numerical Solution of Heat Transfer Unsteady Boundary Layer Magnetohydrodynamics in Micropolar Fluid Past A Sphere", *International Journal of Far East Journal of Mathematical Sciences*, Puspha Publishing House, India.
- Wijaya, I.G.E.P. (2016), *Magnetohidrodinamik Fluida Kental Tak Tunak dengan Konveksi Paksa yang Mengalir Melewati Bola Teriris*, Tesis Magister, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

BIODATA PENULIS



Nadya Alvi Rahma lahir pada tanggal 12 Juli 1993 di kota Malang, Jawa Timur, anak pertama dari 2 bersaudara, pasangan Bapak H. Sunaryo, A.Md dan Ibu Hj. Dr. Husnul Chotimah, M.Pd. Tamat Sekolah Dasar pada tahun 2005 di SDN Bareng 3 Malang, Sekolah Menengah Pertama pada tahun 2008 di MTsN Malang I, dan Sekolah Menengah Atas pada tahun 2011 di SMAN 3 Malang. Pendidikan selanjutnya ditempuh di Universitas Negeri Malang pada Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Matematika angkatan 2011

dan mendapat gelar Sarjana Pendidikan dengan menulis skripsi yang berjudul “Penerapan Model Pembelajaran Kooperatif Tipe *Think Talk Write* (TTW) untuk Meningkatkan Komunikasi Matematis Tertulis Siswa Kelas X KPR-2 SMKN 13 Malang”. Kemudian melanjutkan studi di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada Program Studi Magister Matematika angkatan 2015. Selama mengenyam pendidikan sebagai Mahasiswa Magister Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember, penulis mendapat pengalaman menjadi *Coordinator of Thailand – Indonesia Student and Teacher Exchange Program* untuk SD Muhammadiyah Sidoarjo, SMKN Bandung, Solo dan Jogjakarta, serta Lopburi College of Agriculture and Technology Thailand.